TD6 - Séance 1 du Chapitre 2 - A23

Exercices 1 (sauf b), 2, 23, 15 (sauf dernière question), et 5 du Chapitre 2.

ETD-2-1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-2,-1,0,1,2\}$, telle que $p_X(-2)=p_1$, $p_X(-1)=p_2$, $p_X(0)=p_3$, $p_X(1)=p_4$ et $p_X(2)=p_5$.

a- Que doivent vérifier p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 ?
Corrigé: Ils doivent vérifier: Pour $i\in\{1,\ldots,5\}, 0\le p_i\le 1$ et $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$.

b- On suppose pour la suite que $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5$. Calculer l'espérance et la variance de X.
Corrigé: Posons $p=p_i$, puisque les p_i sont égaux, ainsi $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$ entraine $p=1/5$. $E[X]=\frac{1}{5}(-2-1+0+1+2)=0$, bien remarquer que ce résultat est logique puisque les modalités (ou résultats possibles) sont équiprobables et la variable est symétrique par rapport à 0. La variance est donc dans ce cas $Var(X)=E[X^2]$, car X est une variable aléatoire centrée (c.a.d. $E[X]=0$),

$$E[X^2]=\frac{1}{5}\left((-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2\right)=2.$$

c- Soit $Y=X^2$. Y est-elle une variable aléatoire discrète ? Si oui, donner sa loi.
Corrigé: Voir le cours, Y est une variable aléatoire discrètre car $Y=f(X)$ où X est une variable aléatoire discrètre et $f:x\to x^2$.

d- Tracer F_X et F_Y (si elle existe).
Corrigé: La fonction

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-2,\\ \frac{1}{5} & \text{si} \quad -2\le x<-1,\\ \frac{2}{5} & \text{si} \quad -1\le x<0,\\ \frac{3}{5} & \text{si} \quad 0\le x<1,\\ \frac{4}{5} & \text{si} \quad 1\le x<2,\\ 1 & \text{si} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad y<0,\\ \frac{1}{5} & \text{si} \quad 0\le y<1,\\ \frac{3}{5} & \text{si} \quad 1\le y<4,\\ 1 & \text{si} \quad y\ge 4\end{cases}$$

Il suffit de représenter graphiquement les fonctions en escaliers.

e- Soit Z une v.a. de Fdr $F_Z(x)=\frac{1}{2}1_{[0,+\infty[}(x)+\frac{1}{3}1_{[1,+\infty[}(x)+\frac{1}{6}1_{[4,+\infty[}(x)$. Donner la loi de Z.
Corrigé: Il s'agit d'une autre manière d'écrire la f.d.r. d'une variable aléatoire. Il suffit de bien remarquer là où se produisent les sauts, ainsi $P(Z=0)=\frac{1}{2}$, $P(Z=1)=\frac{1}{3}$ et $P(Z=4)=\frac{1}{6}$.

ETD-2-2 Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois respectives :

$$P(X=1)=p_1\ ;\ P(X=2)=p_2,$$

$$P(Y=1)=q_1\ ;\ P(Y=2)=q_2,$$

avec $0<p_1<1$; $0<p_2<1$; $0<q_1<1$; $0<q_2<1$, satisfaisant de plus $p_1+p_2=1$ et $q_1+q_2=1$. On pose : $Z_1=\min(X,\ Y)$; $Z_2=\max(X,\ Y)$; $Z_3=Z_2-Z_1$; $Z_4=Z_1+Z_2$.

a- Déterminer les lois de probabilités de Z_1, de Z_2, du couple (Z_1, Z_2) de Z_3 et de Z_4.
Corrigé:
Loi de Z_1: l'ensemble des résultats possibles est $Z_1(\Omega) = \{1, 2\}$, on remarque que la probabilité de la modalité 2 est plus rapide à calculer car $P(Z_1 = 2) = P(X = 2)P(Y = 2) = p_2q_2$ et on peut en déduire $P(Z_1 = 1) = 1 - p_2q_2$. Pour ceux qui souhaitent faire le calcul direct alors $P(Z_1 = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = 1 - p_2q_2$.

Loi de Z_2: l'ensemble des résultats possibles est $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$, on remarque que la probabilité de la modalité 1 est plus rapide à calculer car $P(Z_2 = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p_1q_1$ et on peut en déduire $P(Z_2 = 2) = 1 - p_1q_1$. Pour ceux qui souhaitent faire le calcul direct alors $P(Z_2 = 2) = P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = 1 - p_1q_1$.

Loi de (Z_1, Z_2): l'ensemble des résultats possibles est $(Z_1, Z_2)(\Omega) = \{(1, 1)(1, 2), (2, 2)\}$. $P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p_1q_1$, $P(Z_1 = 2, Z_2 = 2) = P(X = 2)P(Y = 2) = p_2q_2$ et $P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = 1-p_1q_1-p_2q_2$ ou bien faire $P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1)$.

Loi de Z_3: l'ensemble des résultats possibles est $Z_3(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Z_3 = 0) = P(Z_1 = Z_2) = p_1q_1 + p_2q_2$ et $P(Z_3 = 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = p_1q_2 + p_2q_1$.

Loi de Z_4: l'ensemble des résultats possibles est $Z_4(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, $P(Z_4 = 2) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = p_1q_1$, $P(Z_4 = 3) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 2) = p_1q_2 + p_2q_1$ et $P(Z_4 = 4) = P(Z_1 = 2, Z_2 = 2) = p_2q_2$.

b- Les v.a. Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?
Corrigé: Si Z_1 et Z_2 étaient indépendantes alors il faudrait montrer que $\forall(i, j) \in Z_1(\Omega) \times Z_2(\Omega)$, $P(Z_1 = i, Z_2 = j) = P(Z_1 = i)P(Z_2 = j)$, or dans le cas présent on a

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = p_1q_1 \neq (1 - p_2q_1)p_1q_1 = P(Z_1 = 1)P(Z_2 = 1),$$

ce qui permet d'affirmer que les v.a. Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

ETD-2-23 Considérons une machine qui au début d'une journée est soit en panne soit en état de marche. Si la machine est en panne au début de la n-ième journée, la probabilité qu'elle soit réparée et opérationnelle au début de la journée suivante est p. De façon analogue, si au début de la n-ième journée la machine est en état de bon fonctionnement, la probabilité qu'elle soit en panne au début de la journée suivante est q.
Notons X_n la variable aléatoire qui représente l'état de la machine au début de la n-ième journée ; X_n prend la valeur 1 si la machine fonctionne et 0 sinon.

a- Exprimer en fonction de p et q les probabilités suivantes : $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$ et $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$.

b- On note $\pi_n = P(X_n = 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de π_{n+1} en fonction de p, q et π_n.

c- Supposons que $0 < p, q < 1$. Exprimer π_n en fonction de p, q et π_0 (on calculera π_1, π_2 puis on utilisera la relation : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ lorsque $x \neq 1$).

d- Calculer, pour $0 < p, q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \pi_n$. Comment interpréter ce résultat ?

Corrigé :

a- Il suffit de lire le texte de l'énoncé :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) &= p, \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) &= q, \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) &= 1 - p, \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) &= 1 - q. \end{aligned}$$

b- D'après le théorème des probabilités totales, pour $n \geq 1$, on a :

$$\pi_n = \mathbb{P}(X_n = 0) =$$

$$= (1 - p)\pi_{n-1} + q(1 - \pi_{n-1}) = (1 - p - q)\pi_{n-1} + q.$$

c- Comme $0 < p, q < 1$ on a $-1 < 1 - p - q < 1$. De plus

$$\pi_1 = (1 - p - q)\pi_0 + q,$$

et

$$\pi_2 = (1 - p - q)\pi_1 + q = (1 - p - q)^2\pi_0 + q(1 + (1 - p - q)),$$

Une simple récurrence permet d'obtenir :

$$\pi_n = (1 - p - q)^n\pi_0 + q(1 + (1 - p - q) + \cdots + (1 - p - q)^{n-1}) =$$

$$= (1 - p - q)^n\pi_0 + q\frac{(1 - (1 - p - q)^n)}{p + q},$$

car $1 - p - q \neq 1$.

d- Comme $|1 - p - q| < 1$ on a $\lim_{n\to+\infty}(1 - p - q)^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \frac{q}{p+q}$.
Il est intéressant de noter que lorsque le temps passe, la probabilité qu'au début d'un jour donné la machine fonctionne varie de moins en moins et surtout qu'elle ne dépend plus (en passant à la limite) de la De plus on peut remarquer que pour $n \geq 1$:

$$\pi_n = \left[\pi_0 - \frac{q}{p + q}\right](1 - p - q)^n + \frac{q}{p + q},$$

et donc si $\pi_0 = \frac{q}{p+q}$ la probabilité π_n ne dépend pas de n.

ETD-2-15 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi : $P(X = k) = (1 - \theta)\theta^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, et $\theta \in]0, 1[$.Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y = \min\{n_0, X\}$ et $Z = \max\{n_0, X\}$.

a- Déterminer la loi de Y.
Corrigé: On commence par remarquer que la loi de X est celle d'une v.a. $G(\theta)$.
$Y(\Omega) = \{1, \ldots, n_0\}$ et d'une part on a

$$P(Y = n_0) = P(X \geq n_0) = \sum_{k=n_0}^{\infty} P(X = k) = (1 - \theta)\sum_{k=n_0}^{\infty} \theta^{k-1}$$

$$= (1-\theta)\theta^{n_0-1}\sum_{j=0}^{\infty}\theta^j = (1-\theta)\theta^{n_0-1}\frac{1}{1-\theta} = \theta^{n_0-1}.$$

D'autre part c.a.d pour $k \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$, on a

$$P(Y = k) = P(X = k) = (1-\theta)\theta^{k-1}.$$

b- Déterminer la loi de Z.
Corrigé: $Z(\Omega) = \{n_0, \ldots, \infty\}$ et d'une part on a

$$P(Z = n_0) = P(X \leq n_0) = \sum_{k=1}^{n_0} P(X = k) = (1-\theta)\sum_{k=1}^{n_0}\theta^{k-1}$$

$$= (1-\theta)\sum_{j=0}^{n_0-1}\theta^j = (1-\theta)\frac{1-\theta^{n_0}}{1-\theta} = 1-\theta^{n_0}.$$

D'autre part, c.a.d pour $k \geq n_0 + 1$, on a

$$P(Z = k) = P(X = k) = (1-\theta)\theta^{k-1}.$$

Montrer que si X est une v.a. entière alors : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.
Corrigé:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} P(X = k)$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} P(X = k) = \sum_{l=1}^{\infty} P(X \geq l).$$

ETD-2-5 On considère deux avions, un biréacteur B et un quadriréacteur Q. On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p de tomber en panne et qu'ils sont indépendants les uns des autres. Soient X et Y les v.a. indiquant respectivement le nombre de réacteurs de B et Q tombant en panne au cours d'un même vol.

a- Etablir les lois de probabilité de X et Y.
Corrigé: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et pour $k \in X(\Omega)$,

$$X = X_1 + X_2.$$

les v.a. X_i sont indépendantes et telles que

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i\text{-ème réacteur en panne,} \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

ceci est résumé en disant que les X_i suivent la loi de Bernoulli $B(p)$. Ainsi, X suit la loi Binômiale $B(2, p)$.
$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et pour $k \in Y(\Omega)$,

$$Y = Y_1 + Y_2.$$

les v.a. Y_i sont indépendantes et telles que

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i\text{-ème réacteur en panne,} \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

ceci est résumé en disant que les Y_i suivent la loi de Bernoulli $B(p)$. Ainsi Y suit la loi Binômiale $B(4, p)$.

b- On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ses réacteurs fonctionne normalement. Soient P_B et P_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par un biréacteur et par un quadriréacteur. Donner P_B et P_Q en fonction de p. Indiquer selon les valeurs de p l'avion qui offre le plus de sécurité.

Corrigé:

$$P_B = P(X \leq 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - p^2,$$

$$P_Q = P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 3) - P(Y = 4) = 1 - 4p^3(1-p) - p^4,$$

$$P_Q > P_B \Leftrightarrow 1 - 4p^3(1-p) - p^4 > 1 - p^2 \Leftrightarrow -4p + 3p^2 + 1 > 0$$

les racines du trinôme sont $p = 1$ et $p = 1/3$, le trinôme est positif pour $p > 1$ (impossible !) et pour $p < 1/3$. Ainsi, le quadriréacteur est plus sûr lorsque $p < 1/3$.