TD6 - Séance 2 du Chapitre 2 - A23

Exercices 3, 13, 21, 28 et 12 du Chapitre 2.

ETD-2-3 L'oral d'un examen comporte vingt sujets possibles. Le candidat tire trois sujets au hasard, parmi ces trois sujets il choisit le sujet qu'il désire traiter. Ce candidat a révisé seulement douze sujets. On considère la v.a. X, nombre de sujets révisés parmi les trois sujets tirés.

a- Quelle est la loi de X ?
Corrigé: On a une population de 20 sujets d'examen dont 12 sujets réviés, on a donc une partition. Les trois sujets forment échantillon de taille 3. La v.a. X a comme ensemble des résultats possibles $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et pour $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{C_{12}^{k} C_{20-12}^{3-k}}{C_{20}^{3}}.$$

Par exemple le dénominateur indique comment peut on prendre 3 sujets dans une population de 20, en considérant que les trois sujets sont différents et que l'ordre ne joue aucun rôle.
En fait X suit la loi Hyperéométrique, $H(20, 12, 3)$, mais dans un premier temps ceci n'est pas nécessaire de le savoir pour répondre.

b- Quelle est la probabilité que le candidat obtienne au moins un sujet révisé ?
Corrigé: $1 - P(X = 0) = 0.95$ ceci est une réponse rapide.

ETD-2-13 Une entreprise cherche à organiser sa production. Elle produit des machines spécialisées de type A toutes différentes. Elle a une probabilité 0,6 de vendre immédiatement chacune des machines de type A qu'elle produit. On suppose qu'elle en produit trois.

a- Quelle est la probabilité qu'elle vende les trois ?
Corrigé: Une facon de faire est: on définit $A_i = \{$ i-ème machine vendue $\}$, alors on calcule

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (0.6)^3.$$

b- Quelle est la probabilité qu'elle en vende au moins deux ?
Corrigé: On peut exprimer l'évènement $B = \{$vendre au moins deux$\}$ de la manière suivante

$$B = (A_1A_2A_3) \cup \left(\overline{A}_1A_2A_3\right) \cup \left(A_1\overline{A}_2A_3\right) \cup \left(A_1A_2\overline{A}_3\right).$$

Alors $\mathbb{P}(B)$ est égale à

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3(0.6)^2(0.4) + (0.6)^3.$$

Remarque supplémentaire :
Notez que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{$vendre au moins une$\}$, et $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 = \{$vendre au plus deux$\}$ sont des évènements différents de B. Les évènements A_1, A_2 et A_3 ne sont pas disjoints deux à deux, et leurs complémentaires non plus. Alors, pour calculer les probabilité de

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ et de $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, nous pouvons les écrire sous forme de réunions disjointes de la manière suivante (on utilise le résultat de l'Exo 1 - Ch 1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}\left(\overline{A}_1 A_2\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right)\\ &= 0.6 + 0.4 \times 0.6 + (0.4)^2(0.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}_1 \cup A_1\overline{A}_2 \cup A_1 A_2\overline{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}_1\right) + \mathbb{P}\left(A_1\overline{A}_2\right) + \mathbb{P}\left(A_1 A_2\overline{A}_3\right)\\ &= 0.4 + 0.6 \times 0.4 + (0.6)^2(0.4)\end{aligned}$$

c- Indiquer la loi de probabilité de la variable aléatoire X indiquant le nombre de machines vendues.
Corrigé: $X = X_1 + X_2 + X_3$ où les X_i sont indépendantes et de même loi $B(0.6)$, ainsi $X \sim B(3; 0.6)$.

d- Quelle est l'espérance mathématique de X ? Préciser sa signification.
Corrigé: $E[X] = 3 \times 0.6 = 1.8$ en moyenne l'entreprise vendrait 1.8 machines.

ETD-2-21 Une banque a connu quelques difficultés de trésorerie; son conseil d'administration décide d'organiser la gestion de manière à ce qu'il y ait 999 chances sur 1000 de toujours pouvoir faire face aux demandes de retrait des déposants (on suppose qu'il n'y a aucun mouvement de panique parmi les déposants ; les habitants de ce pays mènent une vie paisible et ne se préoccupent pas les uns des autres). La banque a 1000 clients et le dépôt de chaque client est de 1000e. La probabilité qu'un client retire son argent un jour donné est 0,001. Dans ces conditions, combien la banque doit-elle conserver de liquidités journalières pour obéir au principe de gestion qui a été posé ?
Corrigé: Soit $X_i = 1$ si le i-ème client retire son argent, $X_i = 0$, sinon.
Soit X= nombre de clients qui retirent leur argent un jour donné. Ainsi $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$, la v.a. $X \sim B(1000; 0.001)$, comme on a $0.001 << 1 << 1000$, on peut approcher la loi binômiale par la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$ (résultat du Chapitre 5).
On cherche à calculer le plus petit k tel que $P(X \geq k) > 0.999$ ce qui peut s'approcher par

$$\sum_{l=0}^{k} e^{-1}\frac{1}{l!} > 0.999 \Rightarrow k = 5.$$

La somme a conserver est donc 5000e.

ETD-2-28 Dans une banque, un guichet automatique permet de retirer des billets de 50 Euros. Le nombre de clients utilisant l'appareil dans un intervalle de temps de 5 minutes est une variable aléatoire N telle que :

$$P(N = 0) = 0.3;\ P(N = 1) = 0.1;\ P(N = 2) = 0.4;\ P(N = 3) = 0.2.$$

a- Déterminer l'espérance de la v.a. N.
Solution
E[N]=1.5

b- On suppose que les nombre des clients utilisant l'appareil sur deux périodes de 5 minutes ne se chevauchant pas sont indépendants. Soit C la variable aléatoire "nombre de clients utilisant l'appareil en une heure". C peut s'écrire :

$$C = \sum_{i=1}^{12} N_i$$

où N_i désigne le nombre de clients utilisant l'appareil au cours du i-ème intervalle de 5 minutes, lorsque l'on découpe l'heure en 12 intervalles de 5 minutes ; chaque N_i suit la même loi que N.

i- Quelles sont les valeurs possibles de C. Calculer E(C).
Solution
Valeurs possibles de C :$\{0, 1, \ldots, 35, 36\}$. $E[C] = 18$.

ii- Calculer P(C=0).
Solution
$P(C = 0) = P(N_1 = 0, N_2 = 0, \ldots, N_{12} = 0) = (0.3)^{12}$.

ETD-2-12 On dispose d'une boîte contenant initialement a boules rouges et b boules blanches ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On tire une boule au hasard puis on la remet dans la boîte, ainsi qu'une autre boule de la même couleur. Puis on recommence.
On note R_i l'événement {la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge}, B_i l'événement {la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche}. On considère la variable aléatoire :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad R_i, \\ 0, & \text{si} \quad B_i. \end{cases}$$

a- Quelle est la loi $\mathcal{L}$ de X_1 ? Calculer son espérance.

b- Calculer $P(R_2|R_1)$ et $P(R_2|B_1)$. Quelle est la loi de X_2 ?

c- On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

i- Dans quel ensemble $\mathcal{S}_n$ la variable aléatoire S_n prend-elle ses valeurs ? Soit $k \in \mathcal{S}_n$. Si $S_n = k$, quelle est la composition de la boîte après le $n^{\text{ème}}$ tirage ? En déduire $P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.

ii- Montrer que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a+k}{a+b+n} \mathbb{P}(S_n = k).$$

iii- En déduire que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b+n} + \frac{\mathbb{E}[S_n]}{a+b+n}.$$

d- On fait l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}_n \;:\; (X_1, \cdots, X_n \text{ suivent la loi } \mathcal{L} \text{ du a}).$$

i- Si $\mathcal{P}_n$ est vraie calculer $\mathbb{E}[S_n]$.

ii- Montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n.

Corrigé :

a- X_1 suit une loi de Bernoulli $B(a/(a+b))$. $\mathbb{E}(X_1) = a/(a+b))$.

b- $P(R_2|R_1) = (a+1)/(a+b+1)$ et $P(R_2|B_1) = a/(a+b+1)$. Maintenant, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_2 = 1) = P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|B_1)P(B_1) = \frac{a}{a+b}.$$

Donc $X_2 \sim B(a/(a+b))$.

c- i- $\mathcal{S}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Si $S_n = k$ après le n-ième tirage le contenu de l'urne est de $a+k$ boules rouges et $b+n-k$ boules blanches. Par conséquent :

$$P(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \frac{a+k}{a+b+n}.$$

ii- Comme $\{S_n = k\}_{k\in\mathcal{S}_n}$ est une famille exhaustive d'événements, d'après le théorème des probabilités totales on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = 1|S_n = k)P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a+k}{a+b+n} P(S_n = k).$$

iii- On en déduit que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a+b+n} P(S_n = k) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{a+b+n} P(S_n = k)$$

$$= \frac{a}{a+b+n} \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) + \frac{1}{a+b+n} \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) = \frac{a}{a+b+n} + \frac{\mathbb{E}(S_n)}{a+b+n}.$$

d- i- Sous $\mathcal{P}_n$ on a : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = na/(a+b)$.

ii- Nous avons vu que $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$ (et même $n = 2$) supposons-la vraie au rang $n \geq 1$ alors d'après c-iii- on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b+n} + \frac{\mathbb{E}(S_n)}{a+b+n},$$

or d'après d-i- on a sous $\mathcal{P}_n$: $\mathbb{E}(S_n) = na/(a+b)$, donc :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b+n} + \frac{na}{(a+b)(a+b+n)} = \frac{a^2+ba+na}{(a+b)(a+b+n)} = \frac{a}{a+b}.$$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie. Nous venons donc d'établir $\mathcal{P}_n$ pour