## TD6 - Séance 3 du Chapitre 2 - A23

Exercices 11, 17, 20, 30, 9 et 31 du Chapitre 2.

**ETD-2-11** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que la variable aléatoire $X$ satisfait :

$$P(X = -1) = p_1,\ P(X = 1) = p_2,$$

avec $p_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ et $p_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ et que la loi de $Y$ est uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

a- Donner les lois de $X$ et $Y$.

b- Déterminer la loi de $S = X + Y$.

c- On définit la variable aléatoire $Z$ par :

$$Z = \begin{cases} \theta_1, & \text{si} \qquad X + Y = 0, \\ \theta_2, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\theta_1$ et $\theta_2$ sont deux entiers distincts fixés.

i- Montrer que la loi de $Z$ ne dépend pas de $p_1$ et $p_2$.

ii- Déterminer les valeurs de $\theta_1$ et $\theta_2$ de sorte que $\mathbb{E}(Z) = 3$ et $\mathrm{Var}(Z) = 2$.

iii- Retrouver $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$ à l'aide de la fonction génératrice de $Z$.

**Corrigé:**

(a) $P(X = -1) = p_1,\ P(X = 0) = 1 - p_1 - p_2$, et $P(X = 1) = p_2$ et
$P(Y = -1) = 1/3,\ P(Y = 0) = 1/3\ P(Y = 1) = 1/3$.

(b) $P(S = -2) = P(X = -1)P(Y = -1) = p_1/3$,
$P(S = -1) = P(X = -1)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = -1) = (1 - p_2)/3$,
$P(S = 0) = P(X = -1)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = -1) + P(X = 0)P(Y = 0) = p_1/3 + p_2/3 + 1/3(1 - p_1 - p_2) = 1/3$,
$P(S = 1) = P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1) = (1 - p_1)/3$ et
$P(S = 2) = P(X = 1)P(Y = 1) = p_2/3$.

(i) $P(Z = \theta_1) = P(S = 0) = 1/3$ et
$P(Z = \theta_2) = 1 - P(Z = \theta_1) = 2/3$.

(ii) $E(Z) = (\theta_1 + 2\theta_2)/3$ et $Var(Z) = (\theta_1^2 + 2\theta_2^2)/3 + (\theta_1 + 2\theta_2)^2/9 = 2(\theta_1 - \theta_1)^2/9$. En faisant $E(Z) = 3$ et $Var(Z) = 2$ on obtient un système d'équations qui admet deux solutions : $(\theta_1, \theta_2) = (5, 2)$ et $(\theta_1, \theta_2) = (1, 4)$.

(iii) $g_Z(u) = E(u^Z) = (u^{\theta_1} + 2u^{\theta_2})/3$, alors $E(Z) = g'_Z(1) = (\theta_1 + 2\theta_2)/3$ et $Var(Z) = g''_Z(1) + g'_Z(1) - (g'_Z(1))^2 = 2(\theta_1 - \theta_2)^2/9$

**ETD-2-17** I- Dans l'algorithme qui suit la fonction `ALEA` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et uniformément distribué sur $[0, 1]$. De plus, les résultats des appels successifs d'`ALEA` sont indépendants. Soit $p \in ]0, 1[$, on considère l'algorithme suivant :

```
X=1
Tant que (ALEA > p)
Faire
X = X + 1
Fin de Faire
```

$X$ étant le résultat obtenu en fin d'algorithme, trouver la loi de la variable aléatoire $X$. De quelle loi connue s'agit-il ?

**Corrigé:** Nous pouvons remarquer que $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, si on note "alea($i$)" le résultat de l'i-ème appel à la fonction `ALEA` dans l'algorithme, pour $i = 1, \dots, k$, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\text{alea}(1) > p, \dots, \text{alea}(k-1) > p, \text{alea}(k) \leq p) = P(\text{alea} > p)^{k-1} P(\text{alea} \leq p) \\ &= (1-p)^{k-1} p. \end{aligned}$$

$X$ suit donc la loi géométrique de paramètre $p$.

II- Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$. On rappelle que si $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

a- Déterminer $g$ la fonction génératrice de la variable aléatoire $X$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
**Corrigé:**

$$\begin{aligned} g_x(u) = E[u^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} u^k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k (1-p)^{k-1} p \\ &= up \sum_{l=0}^{\infty} (u(1-p))^{k-1} = pu \frac{1}{1 - u(1-p)}. \end{aligned}$$

On remarquera, que lors du passage de la 1-ère à la deuxième ligne on a fait un changement d'indice $l = k - 1$, ce qui nous permet d'avoir une somme géométrique. D'après le cours on sait que $E[X] = g_X'(1)$ or $g_X'(u) = \frac{d}{du}(g_X(u)) = \frac{p}{(1-(1-p)u)^2}$, on en déduit donc que $E[X] = g_X'(1) = \frac{1}{p}$.
La variance est donnée d'après le cours par $Var(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = \frac{1-p}{p^2}$.

b- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X > k + n | X > n) = P(X > k)$.
**Corrigé:**

$$\begin{aligned} P(X > k) = 1 - P(X \leq k) &= 1 - \sum_{j=1}^{k} P(X = j) = 1 - p \sum_{j=1}^{k} (1-p)^{j-1} \\ &= 1 - p \sum_{l=0}^{k-1} (1-p)^l = 1 - p \left( \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right) = (1-p)^k. \end{aligned}$$

et

$$P(X > k + n | X > n) = \frac{P(X > k + n \cap X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X > k + n)}{P(X > n)}$$

en utilisant le résultat qui précéde (c.a.d. $P(X > k) = (1-p)^k$) dans le numérateur et dans le dénominateur, on a

$$P(X > k + n | X > n) = \frac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^k.$$

*Remarque :* Cette propriété est connue sous le nom d'*absence ou perte de mémoire*. La seule loi discrète qui satisfait cette propriété est la loi géométrique.

c- Soient $Y$ et $Z$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p$.

i- Soit $S$ la variable aléatoire définie par $S = Y + Z$. Lorsque $S = s$, où $s \geq 2$, quelles sont les valeurs possibles des variables aléatoires $Y$ et $Z$ ?
**Corrigé:** D'une part $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'autre part

$$\{S = s\} = \cup_{k=1}^{s-1} \{Z = k, Y = s - k\},$$

on remarquera que la plus grande valeur de $k$ est $s - 1$, car $Y$ ne prends que des valeurs entières supérieures (au sens large) à 1.

ii- Déterminer la loi de $S = Y + Z$.
**Corrigé:** Pour $s \in \{2, 3, \ldots\}$,

$$P(S = s) = P\left(\cup_{k=1}^{s-1} \{Z = k, Y = s - k\}\right) = \sum_{k=1}^{s-1} P(Z = k, Y = s - k)$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} P(Z = k) P(Y = s - k) = p^2 \sum_{k=1}^{s-1} (1-p)^{k-1}(1-p)^{s-k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{s-1} (1-p)^{s-2}$$

$$= (s - 1)p^2(1 - p)^{s-2}.$$

On remarquera que la loi de la variables somme de deux variables inépendantes de loi $G(p)$ ne suit pas la loi géométrique.

iii- Calculer $P(Y = j|S = s)$ et préciser les valeurs possibles de $j$. Quel fait surprenant fait apparaître ce résultat ?
**Corrigé:** Pour $j \in \{1, \ldots, s - 1\}$ nous avons

$$P(Y = j|S = s) = \frac{P(Y = j \cap S = s)}{P(S = s)} = \frac{P(Y = j \cap Z = s - j)}{P(S = s)} = \frac{1}{s - 1},$$

ce qui signifie que la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{S = s\}$ est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, s - 1\}$.

ETD-2-20 Pour l'expérience aléatoire qui consiste à jeter *ad infimum* et de manière indépendante une pièce (pas forcément équilibrée), définissons les v.a. $X_1, X_2, \ldots,$ telles que :

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{si la pièce donne pile au } i\text{-ème lancer,} \\ -1, & \text{si la pièce donne face au } i\text{-ème lancer.} \end{cases}$$

Considérons les v.a. $S_1, S_2, \ldots, S_n$ $(n \geq 1)$, définies par :

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

a- Donner la loi de $X_1$ et calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}[X_1]$.
**Corrigé:** Si la pièce n'est pas biaisée, on considère $p = 1/2$, sinon de facon générale,

$$P(X_i = 1) = p, \; P(X_i = -1) = 1 - p$$

$$E[X] = p - (1 - p) = 2p - 1 \text{ et } Var(X) = p + (-1)^2(1 - p) - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p).$$

b- Calculer $P(S_n = n)$, $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}[S_n]$. Sous quelle condition avons-nous $\mathbb{E}[S_n] < 0$ ?
**Corrigé:**

$$\begin{aligned} P(S_n = n) &= P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = p^n, \\ E[S_n] &= E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = n(2p-1), \\ V(S_n) &= V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + Var(X_n) = nVar(X_1) = 4np(1-p). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}[S_n] < 0 \iff p < 1/2$.

c- Calculer $P(S_n \geq 0)$.
**Corrigé:** Nous avons que

$$P(S_n \geq 0) = P(S_n = 0) + \ldots + P(S_n = n).$$

On peut remarquer que $S_n$ est à valeurs dans $E_n = \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}$, c'est à dire les valeurs $j \in \mathbb{N} : -n \leq j \leq n$, $j$ de même parité que $n$. En effet, nous avons que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} - \left( n - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \right) \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} - n. \end{aligned}$$

Alors , pour $j \in E_n,\ j \geq 0$ on a

$$P\left(S_n = j\right) = P\left( \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} = \frac{n+j}{2} \right) = C_n^{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}},$$

car cela revient à placer les $\frac{n+j}{2}$ "1" parmi les $n$ positions. Ainsi, si $n$ est pair

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 0) &= \sum_{j=0,\, j \text{ pair}}^{n} C_n^{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}} \\ &= \sum_{k=n/2}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

et si $n$ est impair

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 0) &= \sum_{j=1,\, j \text{ impair}}^{n} C_n^{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}} \\ &= \sum_{k=(n+1)/2}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

*Remarque :*

Une autre manière de voir les choses est que

$$\{S_n = j\} = \{j + \frac{n-j}{2} \text{ sont de "1" et } n - j - \frac{n-j}{2} \text{ sont de "-1"}\}$$

à condition que $j$ et $n$ aient même parité, ce qui conduit au même résultat.

d- Calculer la loi de $S_n$.
**Corrigé:** Pour $j \in E_n$,

$$\begin{aligned} \text{Si } j \geq 0 \quad & P(S_n = j) = C_n^{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}} \\ \text{Si } j < 0 \quad & P(S_n = j) = C_n^{\frac{n-j}{2}} p^{\frac{n-j}{2}} (1-p)^{\frac{n+j}{2}}. \end{aligned}$$

e- Si $p = 1/2$, montrer[1] que $P(S_{2k} = 0) \sim 1/\sqrt{\pi k}$ lorsque $k \to \infty$. **aide :** utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ lorsque $n \to \infty$.
**Corrigé:**

$$P(S_{2k} = 0) = C_{2k}^k p^k (1-p)^k = C_{2k}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} C_{2k}^k \left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

ainsi pour $k >> 0$, on a

$$\frac{\sqrt{4\pi k} e^{-2k} (2k)^{2k}}{2\pi k e^{-2k} (k)^{2k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

ETD-2-30 Soit $X$ une variable aléatoire de fonction génératrice $g$ définie par :

$$g(x) = 1/4 + x/4 + x^2/4 + x^3/4.$$

a- Donner la loi de $X$.
*Réponse :* $g^{(k)}(0)/k! = P(X = k) \Rightarrow P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = 1/4$.

b- Calculer la moyenne et la variance de $X$.
*Réponse :* $E(X) = (0 + 1 + 2 + 3)/4 = 3/2$, $E(X^2) = (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^3)/4 = 7/2$ et $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7/2 - 9/4 = 5/4$.
Remarque : on pouvait aussi calculer l'espérance et la variance directement à partir de la fonction génératrice, en utilisant les formules correspondantes données en cours.

ETD-2-9 Soit $X$ une v.a. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ ($P(X = k) = 1/n$ pour $1 \leq k \leq n$). Quelle est la fonction de répartition de $X$ ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.
**Corrigé:** La fonction

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{n} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ \ldots, & \\ \frac{k}{n} & \text{si} \quad k \leq x < k+1, \\ \ldots & \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n. \end{cases}$$

[1] La notation $u_n \sim v_n$ signifie que $u_n/v_n \to 1$ lorsque $n \to \infty$, on dit que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont équivalentes au voisinage de l'infini.

$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.
$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

ETD-2-31 Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ peut-elle avoir une loi uniforme ?
*Réponse :* Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de loi uniforme alors

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 0, \\ +\infty & \text{si} \quad p > 0. \end{cases}$$

Ce qui est donc impossible !