TD7 - Séance 1 du Chapitre 3

Exos : 2, 3, 5, 7 et 14 du Chapitre 3

ETD3-2 Un tireur à l'arc vise le centre d'une cible de rayon $R > 0$. La probabilité qu'il atteigne la cible est p ($0 < p < 1$). Si la cible est touchée, la probabilité qu'une zone donnée de la cible soit atteinte est uniforme. Lors d'un concours, les points sont attribués comme suit :

$-k$ points si la cible n'est pas atteinte ;

$R - r$ points lorsque la cible est atteinte, où r est la distance (aléatoire) séparant le centre de la cible du point d'impact sur la cible.

Le gain du tireur, pour un seul tir, est une v.a.r. X. Donner la fonction de répartition F_r de la v.a.r. r lorsque la cible est atteinte. Donner la fonction de répartition F_X de X. A quels types de v.a.r. a-t-on affaire ?

Corrigé: La v.a. r correspond à la distance au centre de la cible, d'un point choisi uniformément dans celle-ci. Nous pouvons considérer que la cible est le discque $D(0, R)$ dans $\mathbb{R}^2$ de centre $\overrightarrow{0} = (0, 0)$ et de rayon R, et que le point atteint par le tireur est une v.a. P qui correspond Ã un point uniformément choisi sur ce disque. Alors pour $0 \leq x < R$

$$\mathbb{P}(r \leq x) = \mathbb{P}(\text{“distance de } P \text{ à } \overrightarrow{0}\text{”} \leq x) = \mathbb{P}(P \in D(0, x)) = \frac{\text{Aire}(D(0, x))}{\text{Aire}(D(0, R))} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2},$$

donc

$$F_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{si} \quad 0 \leq x < R, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq R. \end{cases}$$

Il en découle que r est une v.a. continue.
D'un autre côté, d'après l'énoncé : $P(C) = p$ où $C = \{$ Cible atteinte$\}$, donc $P(\bar{C}) = 1 - p$. En conséquence, la variable aléatoire X est une v.a. mixte car elle prends la valeur $-k$, mais aussi les valeurs dans $[0, R]$.

$$F_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -k, \\ 1 - p & \text{si} \quad -k \leq x < 0, \\ P(X \leq x|C)p + (1-p)(*) = (1 - \left(\frac{R-x}{R}\right)^2)p + (1-p) & \text{si} \quad 0 \leq x < R, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq R. \end{cases}$$

$(*)$ vient du fait que si $0 \leq x < R$ alors $\{X \leq x\} = \{X \leq x \cap C\} \cup \{X \leq x \cap \bar{C}\}$, du fait que $P(X \leq x|\bar{C}) = 1$ et du fait que $P(X \leq x|C) = P(R - r \leq x) = 1 - F_r(R - x) = 1 - \left(\frac{R-x}{R}\right)^2$).

ETD3-3 Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On définit $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $N_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Quelles sont les fonctions de répartition de M_n et N_n ? Supposons que la loi des X_i soit uniforme sur $[0, 1]$, vers quoi converge la f.d.r. F_{M_n} lorsque $n \to +\infty$? Quelle interprétation donner à ce résultat ?

Corrigé: $F_{M_n}(t) = P(M_n \leq t) = P(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) = P(X_1 \leq t)^n = F_X^n(t)$.
$F_{N_n}(t) = P(N_n \leq t)1 - P(N_n > t) = 1 - P(X_1 > t, \ldots, X_n > t) = 1 - P(X_1 > t)^n =$

$1-(1-F_X(t))^n$.
Si la loi des X_i soit uniforme sur $[0,1]$, alors

$$F_{M_n}(t) = \begin{cases} t^n & \text{si} \quad t < 1, \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Lorsque $n \to \infty$, $F_{M_n}(t) \longrightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1, \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1, \end{cases}$ qui est la fonction de répartition de la v.a. $X = 1$.

ETD3-5 Soit X une v.a.r. de f.d.r. F. On suppose F continue. Donner la loi de probabilité de $F(X)$. (On pourra supposer F strictement croissante dans un premier temps.)

Corrigé: Si F est strictement croissante alors c'est une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ et

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \text{ (car } F \geq 0)), \\ P(F(X) \leq t) = P(X \leq F^{-1}(t)) = F(F^{-1}(t)) = t & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \text{ (car } F \leq 1). \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi Uniforme sur $[0,1]$.
Si F est n'est pas strictement croissante alors on définit la fonction pseudo-inverse ou inverse généralisée par

$$F^{-1}(t) = \inf\{x,\ F(x) > t\}, \quad \text{pour } t \in [0,1],$$

la fonction F^{-1} est désormais croissante et

$$P(F(X) \leq t) = P(X \leq F^{-1}(t)) = F(F^{-1}(t)) = t \text{ si } t \in [0,1],$$

et on obtient également la loi Uniforme sur $[0,1]$.

ETD3-7 Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.On pose $Y = X^2$ et $Z = e^X$. Déterminer les densités de probabilités des v.a. Y et Z.

Corrigé:

- $Y = X^2$,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0, \\ (*) & \text{si} \quad y \in [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad y \geq 1, \end{cases}$$

  $(*)$, si $y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}.$$

  La densité est donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} 1_{\{]0,1]\}}$.

- $Y = e^X$,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 1, \\ P(e^X \leq z) = P(X \leq \ln z) = F_X(\ln z) = \ln z & \text{si} \quad 1 \leq z \leq e, \\ 1 & \text{si} \quad z > e. \end{cases}$$

  La densité est donc $f_Z(z) = \frac{1}{z} 1_{\{z \in [1,e]\}}$.

ETD3-14 Soit Y une v.a. réelle uniformément distribuée sur l'intervalle $[3,6]$. Pour tout $n>0$, on pose $X_n = 5n^2$, si $3 \leq Y \leq 3+4/n^2$ et $X_n = 0$, sinon.

a- Déterminer $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$.

Corrigé:

$$X_n = 5n^2 1_{[3,3+\frac{4}{n^2}]}(Y),$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, on a

$$E[X_n] = 5n^2 E[1_{[3,3+\frac{4}{n^2}]}(Y)] = 5n^2 P(3 \leq Y \leq 3+\frac{4}{n^2})$$

$$= 5n^2 \int_3^{3+\frac{4}{n^2}} \frac{1}{3} dt = \frac{5n^2 4}{3n^2} = \frac{20}{3}.$$

Pour $n = 1$, on a

$$E[X_1] = 5P(3 \leq Y \leq 7)(*) = 5\int_3^6 \frac{1}{3} dt = 5.$$

Pour $n \geq 2$

$$E[X_n^2] = 25n^4 P(3 \leq Y \leq 3+\frac{4}{n^2}) = \frac{100}{3} n^2.$$

Pour $n = 1$,

$$E[X_1^2] = 25P(3 \leq Y \leq 7)(*) = 25.$$

Bien remarquer que $(*)$ est due au fait que la v.a. Y est telle que $Y(\Omega) = [3,6]$.

b- Calculer $E(X_{n+1}X_{n+2})$.

Corrigé:

$$E[X_{n+1}X_{n+2}] = 25(n+1)^2(n+2)^2 P(3 \leq Y \leq 3+\frac{4}{(n+2)^2}) = \frac{100}{3}(n+1)^2.$$