TD8 - Séance 2 du Chapitre 3

Exos : 18, 21, 23 du Chapitre 3 , 1et 2 Hors liste

ETD3-18 Une tension électrique aléatoire X (mesurée en volts) de densité de probabilité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x), (\lambda > 0)$ passe par un limitateur qui "coupe" toutes les valeurs de la tension inférieures à u_1 et supérieures à $u_2, (0 < u_1 < u_2 < \infty)$, dans le premier cas en l'élevant à u_1 et dans le deuxième cas en la réduisant à u_2. Notons Y la variable aléatoire désignant la tension issue du limiteur.

a- Calculer $P(Y = u_1)$ et $P(Y = u_2)$. Quel est le type de la variable aléatoire Y ? Ecrire Y en fonction de la variable aléatoire X.
Corrigé:

$$P(Y = u_1) = P(X \leq u_1) = F_X(u_1) = 1 - e^{-\lambda u_1},$$
$$P(Y = u_2) = P(X \geq u_2) = 1 - F_X(u_2) = e^{-\lambda u_2},$$

et

$$Y = X 1_{\{u_1 < X < u_2\}} + u_1 1_{\{X \leq u_1\}} + u_2 1_{\{X \geq u_2\}}.$$

b- Donner la fonction de répartition de Y ; tracer son graphe.
Corrigé: Pour $t \in]u_1, u_2[$,

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(u_1 < Y \leq t) + P(Y = u_1) = P(X \leq t) = F_X(t).$$

Pour $t \leq u_1$, $F_Y(t) = P(Y \leq t) = 0$ et pour $t \geq u_2$, $F_Y(t) = P(Y \leq u_2) = 1$.

c- Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.
Corrigé:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{\{u_1 < X < u_2\}} + u_1 \mathbb{1}_{\{X \leq u_1\}} + u_2 \mathbb{1}_{\{X \geq u_2\}}\right] \\
&= \int_{u_1}^{u_2} x \lambda \exp(-\lambda x) dx + u_1 \int_0^{u_1} \lambda \exp(-\lambda x) dx + u_2 \int_{u_2}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} (\exp(-\lambda u_1) - \exp(-\lambda u_2)) + u_1,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la méthode d'IPP pour calculer la première intégrale dans la 2e ligne. De manière similaire, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 \mathbb{1}_{\{u_1 < X < u_2\}} + u_1^2 \mathbb{1}_{\{X \leq u_1\}} + u_2^2 \mathbb{1}_{\{X \geq u_2\}}\right] \\
&= \int_{u_1}^{u_2} x^2 \lambda \exp(-\lambda x) dx + u_1^2 \int_0^{u_1} \lambda \exp(-\lambda x) dx + u_2^2 \int_{u_2}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
& \text{IPP à faire !}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$.

ETD3-21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \\ x + 1 & \text{si} \quad x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

a- Montrer que f est une densité de probabilité.

Corrigé: La fonction f_X est positive et

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{1}(1-x)dx = 1.$$

b- Soit X une v.a.r. de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Corrigé:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1, \\ (*) & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ (**) & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

$(*)$ si $-1 \leq x < 0$, $F_X(x) = \int_{-1}^{x}(t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

$(**)$ si $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = \int_{-1}^{0}(t+1)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

c- Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$. Justifier sans calcul la valeur de $\mathbb{E}[X]$.

Corrigé:

$$E[X] = \int_{-1}^{0}(t^2+t)dt + \int_{0}^{1}(t-t^2)dt = 0.$$

Ce résultat est attendu vu que la densité de X est une fonction symétrique. De plus, comme X est une v.a. centré $Var(X) = E[X^2]$ et

$$E[X^2] = \int_{-1}^{0}(t^3+t^2)dt + \int_{0}^{1}(t^2-t^3)dt = 1/6.$$

d- Déterminer $P(|X| \geq a)$.

Corrigé:

$$\begin{aligned} P(|X| \geq a) &= P(X < -a) + P(X > a) = 2(1 - F_X(a)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1, \\ 1 & \text{si } a < 0, \\ 2(1 - (\frac{1}{2} + a - \frac{a^2}{2})) = (a-1)^2 & \text{si } 0 \leq a \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

e- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{1}{6a^2}$.

Corrigé: Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev il est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$ que $\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \dfrac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{6a^2}$, ce qui implique, pour $a \in [0,1]$ l'inégalité suivante : $(a-1)^2 \leq \frac{1}{6a^2}$.

f- Soit Y la variable aléatoire uniforme sur $[-1,1]$, indépendante de X. Calculer $P((X,Y) \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2])$.

Corrigé: Par indépendance on a

$$P((X,Y) \in [-1/2,1/2] \times [-1/2,1/2]) = P(X \in [-1/2,1/2])P(Y \in [-1/2,1/2])$$

$$= (F_X(1/2) - F_X(-1/2))(F_Y(1/2) - F_Y(-1/2)) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} - \frac{\frac{-1}{2}+1}{2} 2F_X(\frac{1}{2}) = \frac{3-1}{4}1 = \frac{1}{2}.$$

g- Soit $Z = \min(X, Y)$. Quelle est la loi de Z ?
Corrigé:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq z) &= \mathbb{P}(\min(X,Y) \leq z) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > z)\,\mathbb{P}(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < -1, \\ 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} - z\right)\left(\frac{1-z}{2}\right) & \text{si} \quad -1 \leq z < 0, \\ 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2} - z\right)\left(\frac{1-z}{2}\right) & \text{si} \quad 0 \leq z < 1, \\ 1 & \text{si} \quad z \geq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

ETD3-23 Soit Y une v.a.r. définie par : $Y = m + \theta$ où la v.a.r. θ suit la loi $N(0,1)$ [1] et soit $X = \exp(Y)$.

(a) Déterminer la densité f_X de la variable aléatoire X.

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Donner la fonction génératrice des moments de la v.a. Y. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Corrigé :

(a) Nous avons pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}P(X \leq t) &= P(\exp(m+\theta) \leq t) = P(\theta \leq \ln t - m) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln t - m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{\ln t - m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable pour tout $t \geq 0$ par le théorème fondamental de l'analyse et par composée de fonctions dérivables, alors la densité de la v.a.r. X est

$$f_X(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(\ln t - m)^2/2\right) 1_{\mathbb{R}_+^*}(t).$$

(b) En utilisant la densité de la loi Normale, on a :

$$\begin{aligned}E(X) &= E\left[\exp(m+\theta)\right] = \exp(m) E\left[\exp(\theta)\right] \\ &= \exp(m) \int_{\mathbb{R}} \exp(t) f_\theta(t) dt = \frac{\exp(m)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2} + t) dt \\ &= \frac{\exp(m + 1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1)) dt \\ &= \frac{\exp(m + 1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\{-u^2/2\} du \\ &= \exp(m + 1/2),\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $u = t - 1$, et ensuite on a utilisé l'identité suivante

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2/2) du = 1.$$

(c) De même pour $E(X^2)$, on trouve : $\exp(2m + 2)$, et donc $Var(X) = \exp(2m+1)(e-1)$.

(d) $E(\exp(tY)) = \exp(mt + t^2/2) = E(X^t)$. Donc pour $t = 1$ et $t = 2$, on retrouve $E(X)$ et $E(X^2)$.

[1] de densité $f_\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\},\ t \in \mathbb{R}$