TD9 - Séance 3 du Chapitre 3

Exos : 15, 20, 32, 35 du Chapitre 3 , 3 et 4 Hors liste

ETD3-15 On considère une v.a.r. X centrée et de variance finie σ^2.

a- Montrer que , pour tout $a > 0$,

$$a \leq \mathbb{E}[(a - X)\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(X)] \leq \{P(X \leq a)\}^{1/2}\{\sigma^2 + a^2\}^{1/2}.$$

En déduire que :

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Corrigé: Nous pouvons écrire $a - X = (a - X)\mathbb{1}_{]-\infty,a]}(X) + (a - X)\mathbb{1}_{]a,+\infty]}(X)$, alors en prennant l'espérance nous avons que

$$a = E[a - X] = E[(a - X)\mathbb{1}_{\{X \leq a\}} + (a - X)\mathbb{1}_{\{X > a\}}]$$

$$\leq E[(a - X)\mathbb{1}_{\{X \leq a\}} \leq (P(X \leq a))^{1/2}(E[(a - X)^2])^{1/2},$$

où la première inégalité est due au fait que $(a - X) < 0$ lorsque $X > a$, et la seconde est due à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (c.f. Poly page 68).
De plus

$$E[(a - X)^2] = E[a^2 - 2aX + X^2] = a^2 + \sigma^2,$$

d'où , comme $a > 0$, nous avons

$$a^2 \leq P(X \leq a)(a^2 + \sigma^2) \Longrightarrow \frac{a^2}{a^2 + \sigma^2} \leq 1 - P(X > a) \Leftrightarrow P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

b- Une usine fabrique chaque semaine un nombre aléatoire d'objets Y. On suppose $\mathbb{E}(Y) = 100$ et $\mathrm{Var}(Y) = 400$. Trouver à l'aide de la question précédente un majorant de la probabilité que la production hebdomadaire dépasse 120. Comparer ce résultat avec celui obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Corrigé: On veut évaluer $P(Y > 120)$, or d'après ce qui précède, appliqué à la v.a. centrée $Y - 100$, on a

$$\mathbb{P}(Y > 120) = P(Y - 100 > 20) = \mathbb{P}(X > 20) \leq \frac{400}{20^2 + 400} = \frac{1}{2}.$$

Par l'ínégalité de Bienaymé-Tchebichef on a

$$\mathbb{P}(Y > 120) \leq \mathbb{P}(|Y - 100| > 20) = \mathbb{P}(|X| > 20) \leq \frac{400}{20^2} = 1,$$

qui ne donne aucune information dans ce cas précis.

ETD3-20 Considérons une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $E(\lambda)$. On note f_1 la densité d'une de ces variables aléatoires.

a- Montrer que la densité de $X_1 + X_2$ est $f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.
Corrigé: Pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(x) = (f_1 * f_1)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_1(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x-y)} \mathbb{1}_{[0,+\infty]}(x-y) \lambda e^{-\lambda(y)} \mathbb{1}_{[0,+\infty]}(y) dy \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x-y)-\lambda y} \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(y) \mathbb{1}_{[0,+\infty]}(y) dy \\ &= \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x} dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_2(t) = f_{X_1+X_2}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t).$$

b- Montrer par récurrence que la densité de probabilité f_n de $X_1 + \cdots + X_n$ est définie par :

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Corrigé: Par hypothèse

$$f_n(t) = f_{X_1+\ldots+X_n} = (f * \ldots * f)(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} 1_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Pour $n+1$, on a $S_n + X_{n+1} = X_1 + \ldots + X_n + X_{n+1}$ où $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dont la densité est connue et est donnée par l'hypothèse. Ainsi, pour $x \geq 0$, on a

$$f_{n+1}(x) = f_{X_1+\ldots+X_{n+1}}(x) = f_{S_n+X_{n+1}}(x) = (f_n * f)(x)$$

$$= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy = \frac{\lambda^2}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \int_0^x (\lambda y)^{n-2} dy = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x).$$

c- Soit Y une variable aléatoire indépendante des X_i , de loi géométrique $G(p)$ avec $0 < p < 1$. Calculer la densité de la variable aléatoire $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$.
Corrigé: Avec $Z = Z_Y$, par la loi de probabilité totale on a

$$\begin{aligned} F_{Z_Y}(t) &= P\left(\sum_{i=1}^{Y} X_i \leq t\right) = \sum_{l=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{Y} X_i \leq t, Y = l\right) = \sum_{l=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{Y} X_i \leq t \,\middle|\, Y = l\right) P(Y = l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{l} X_i \leq t\right) P(Y = l) = \sum_{l=1}^{\infty} F_l(t) P(Y = l) \end{aligned}$$

où F_l est la f.d.f. de $X_1 + \ldots X_l$. Si nous admettons avoir les hypothèses pour pouvoir dériver la somme (infinie) précédente, nous avons que la densité de Z_Y peut s'écrire en utilisant la densité f_l calculée dans la question précédente. Nous avons que

$$\begin{aligned} f_{Z_y}(t) = F'_{Z_Y}(t) &= \sum_{l=1}^{\infty} F'_l(t) p(1-p)^{l-1} = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(t) p(1-p)^{l-1} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\lambda t} p(1-p)^{l-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \\ &= p\lambda e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p)))^{l-1}}{(l-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \\ &= p\lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda t(1-p)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = p\lambda e^{-\lambda tp} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \end{aligned}$$

Celle-ci est la densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda p)$, c.a.d. la loi exponentielle de paramétre λp.

d- Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.
Corrigé: Avec $Z = Z_Y$, $E[Z] = \frac{1}{\lambda p}$ et $Var(Z) = \frac{1}{(\lambda p)^2}$.

ETD3-32 Dans un atelier on assemble 100 ordinateurs par jour. En général, 99% des ordinateurs assemblés fonctionnent lorsqu'on les teste. Soit X le nombre d'ordinateurs en état de marche parmi les ordinateurs assemblés un jour donné.

a- Quelle est la loi de X ?

b- Quelle relation existe-t-il entre les événements $\{X \leq 95\}$ et $\{|X - 99| \geq 4\}$?

c- Donner une majoration de $P(|X-99| \geq 4)$, puis en déduire une majoration de $P(X < 95)$.

Corrigé

a. $X = X_1 + \cdots + X_{100}$ où les v.a. X_i sont i.i.d. de loi de Bernoulli $B(0,99)$, donc $X \sim B(100; 0,99)$.

b. $\{|X - 99| \geq 4\} = \{X - 99 \leq -4\} \cup \{X - 99 \geq 4\} = \{X \leq 95\} \cup \{X \geq 103\}$, donc $\{X \leq 95\} \subset \{|X - 99| \geq 4\}$ (il y a même égalité car $\{X \geq 103\} = \emptyset$).

c. Comme X admet une moyenne $\mathbb{E}(X) = 99$ et une variance $\text{Var}(X)$=0,99, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev on a

$$P(|X - 99| \geq 4) \leq \frac{\text{Var}(X)}{16} = \frac{0,99}{16} \leq \frac{1}{16}.$$

De plus $\{X < 95\} \subset \{X \leq 95\}$ d'où $P(X < 95) \leq 0,99/16$.

ETD3-35 Soit f la fonction définie par $f(x) = c_1 \mathbb{1}_{[-2,-1]}(x) + c_2 \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$.

a- Quelles conditions doivent vérifier c_1 et c_2 pour que f soit une densité ?
Réponse : $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$, de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$.

b- Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $Y = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(X) - \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(X)$. Exprimer la loi p_Y de Y en fonction de c_1 et c_2.
Corrigé : On peut remarquer que Y est à valeurs dans $\{-1; 1\}$ (car il y aura toujours l'une des deux indicatrices qui sera égale à 1). Il s'agit donc d'une v.a.r. discrète dont la loi est donnée par :

$$P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = c_1$$

$$P(Y=1) = P(X>0) = \int_0^{+\infty} f(x)dx = c_2.$$

c- Calculer la variance de Y.

Corrigé : $\mathrm{E}(Y) = -1 \times c_1 + 1 \times c_2$. $\mathrm{E}(Y^2) = (-1)^2 \times c_1 + 1^2 \times c_2$. Donc $\mathrm{Var}(Y) = c_1 + c_2 - (c_2 - c_1)^2 = 1 - (c_2 - c_1)^2 = 1 - (2c_2 - 1)^2 = (1 - 2c_2 + 1)(2c_2) = 4c_2(1 - c_2)$.