Chapitre 3 - Exos hors liste corrigés

Exercice 1. Un système est composé de trois composants indépendants. Le temps de bon fonctionnement de chaque composant suit la loi exponentielle de paramètre λ. Le système fonctionne normalement tant que deux composants au moins sont en état de marche. On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le système fonctionne et on note $X_i,\ i = 1, 2, 3$ le temps de bon fonctionnement de chaque composant.

1. Ecrire l'événement $\{T \leq t\}$ comme la reunion de quatre événements deux à deux incompatibles, faisant intervenir X_1, X_2 et X_3.
   Corrigé
   Pour $t \geq 0$:
$$\{T \leq t\} = \{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 > t\} \cup \{X_1 \leq t, X_2 > t, X_3 \leq t\}$$
$$\cup\{X_1 > t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\} \cup \{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\}.$$

2. Déterminer la fonction de répartition de T.
   Corrigé Notons F la fonction de répartition de la v.a. T.
   La fonction de répartition est nulle pout $t < 0$.
   Pour $t \geq 0$:
$$F(t) = P(T \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 > t) + P(X_1 \leq t, X_2 > t, X_3 \leq t)$$
$$+P(X_1 > t, X_2 \leq t, X_3 \leq t) + P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t)$$
   L'indépendance des variables aléatoires X_i, qui suivent la même loi nous permet d'écrire:
$$F(t) = 3\left(P(X_1 \leq t)\right)^2 \left(1 - P(X_1 \leq t)\right) + \left(P(X_1 \leq t)\right)^3$$
$$= -2\left(P(X_1 \leq t)\right)^3 + 3\left(P(X_1 \leq t)\right)^2.$$
   Comme les X_i suivent la même loi exponentielle de paramètre λ, on a $F(t) = 1-3e^{-2\lambda t}+2e^{-3\lambda t}$.

3. Montrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est dérivable en 0. En déduire sa densité f.
   Corrigé On remarque que $F(t)/t$ tends vers 0 lorsque t tends vers 0. La fonction F est donc dérivable pour tout réel t, la v.a. T admet donc une densité définie par $f(t) = 6\lambda\left(e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}\right) 1_{\mathbb{R}_+}(t)$.

Exercice 2. On considère la variable aléatoire X de loi uniforme sur $]-1, 1[$.

1. Donner la densité de X.
   Corrigé : $f_X(x) = \frac{1}{2}1_{]-1,1[}(x)$.

2. Déterminer la probabilité $P(|X| > \frac{1}{2})$.
   Corrigé : $P(|X| > \frac{1}{2}) = P(X < -\frac{1}{2}) + P(X > \frac{1}{2})$
   $= 2P(X > \frac{1}{2})$
   $= 2(1 - P(X \leq \frac{1}{2}))$
   $= 2(1 - \int_{-1}^{1/2} f_x(x)dx) = \frac{1}{2}$.

3. Posons $Y = |X|$, donner la fonction de répartition de Y.
Corrigé : La v.a. Y est définie sur $[0, 1)$ et pour $y \in [0, 1[$ on a :
$F_Y(y) = P(Y \leq y)$
$= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = 2(P(0 \leq X \leq y)) = y$.
D'où $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $F_Y(y) = y$ si $y \in [0, 1[$ et $F_Y(y) = 1$ si $y \geq 1$.

4. Donner la densité de Y.
Corrigé : $f_Y(y) = 1_{[0,1)}(y)$

5. Soit $Z = 1_{[0,1[}(X) - 1_{]-1,0[}(X)$. Déterminer la loi de Z.
Corrigé : $P(Z = 1) = P(X \in [0, 1[) = \frac{1}{2}$ et $P(Z = -1) = P(X \in] - 1, 0[) = \frac{1}{2}$.