Exercice 3. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi commune $\varepsilon(\lambda)$.

1. Donner la loi de $X+Y$ en utilisant le produit de convolution.
   Corrigé : $(f_X * f_Y)(x) = \lambda^2 \int_0^x e^{\{-\lambda(x-y)\}} e^{\{-\lambda y\}} dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} x 1_{\mathbb{R}_*^+}$.

2. Si Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt et soit $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $P(Z < 2) = P(X+Y > t)$.
   Corrigé : $P(X+Y > t) = \int_t^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} x dx$ ce qui donne par intégration par parties $-\lambda x e^{\{-\lambda x\}}|_t^\infty + P(X > t) = e^{-\lambda t}\lambda t + e^{-\lambda t}$. Par ailleurs $P(Z<2) = P(Z=0) + P(Z=1) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\lambda t$.

   (b) Déterminer la fonction génératrice des moments de Z.
   Corrigé :

$$E[e^{uX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} P(Z=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t e^u)^k}{k!} = e^{\lambda t(e^u - 1)}.$$

3. Soit la variable aléatoire $U = e^Y$

   (a) Déterminer la densité de la variable aléatoire U.
   Corrigé : Pour $x \geq 1$ on a $P(U > x) = P(e^Y > x) = P(Y > \log x) = e^{\{-\lambda \log x\}} = x^{-\lambda}$. Donc la densité est $f_U(x) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} 1_{\{x \geq 1\}} (= \frac{1}{x^2})$ si $\lambda = 1$.

   (b) Déterminer $E[U]$.
   Corrigé : $E[U] = \int_1^\infty x f_U(x) dx = \lambda \int_1^\infty x^{-\lambda} dx = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ si $\lambda > 1$. On voit donc qu'elle est infinie (ou qu'elle n'existe pas! au sens du poly) pour $\lambda = 1$.

   (c) Evaluer $E[U^k],\ k \geq 2$.
   Corrigé :

$$P(U^k > x) = P(U > x^{1/k}) = P(Y > \ln(x^{1/k})) = \exp\left(\frac{-\lambda}{k}\ln(x)\right) = x^{-\lambda/k}, \quad \text{si } x \geq 1$$

   et $P(U^k > x) = 1$ si $0 \leq x < 1$. Alors U^k suit la même loi que U, mais avec paramètre λ/k, donc $E[U^k] = \frac{\lambda/k}{\lambda/k - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - k}$ si $\lambda > k$.

Exercice 4. La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée est une v.a. de densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ a(6-x) & \text{si} \quad 3 \leq x < 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a.
   Corrigé : On sait que la densité vérifie $f \geq 0$ et que $\int_R f(x)dx = 1$, ces conditions entrainent que $a > 0$ autrement on aurait une densité nulle et la deuxième condition ne pourrais pas être satifaite. Le calcul de l'intégrale sous la condition égalité à 1, donne $a = 1/9$.

2. Déterminer la fonction de répartition F associée à f.
Corrigé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{1}{9}\int_0^x t dt = \frac{x^2}{18} & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ \frac{1}{9}\int_0^3 t dt + \frac{1}{9}\int_3^x (6-t) dt = \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{18} - 1 & \text{si} \quad 3 \leq x < 6, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 6. \end{cases}$$

3. Quelle est la probabilité, qu'en une journée, soit vendu
   (a) plus de 300 kilos de pain.
   Corrigé : $P(X > 3) = \frac{1}{9}\int_3^6 (6-t)dt = \frac{1}{2}$.
   (b) entre 150 et 450 kilos de pain.
   Corrigé : $P(1,5 < X < 4,5) = F_X(4,5) - F_X(1,5) = \frac{3}{4}$.

4. Soit A l'événement défini par $3(a)$ et B celui défini par $3(b)$, les événements A et B sont-ils indépendants ?
Corrigé : $P(X > 3,\ 1,5 < X < 4,5) = P(3 < X < 4,5) = \frac{3}{8} = P(X > 3)P(1,5 < X < 4,5)$, d' où l'indépendance.