TD10 - Séance 1 du Chapitre 4

Exos : 2, 3, 4, 16 du Chapitre 4

ETD-4-2 Soient Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $B(p)$ ($p \in [0,1]$). Pour $1 \leq i \leq 3$ on pose $X_i = Y_i Y_{i+1}$.

a- Quelle est la loi de X_i ($i = 1, 2, 3$) ? sa moyenne ? sa variance ?
Corrigé:

$$X_i = Y_i Y_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad Y_1 = 1 \text{ et } Y_{i+1} = 1, \text{ donc avec probabilité } p^2 \\ 0, & \text{avec probabilité} \quad 1 - p^2. \end{cases}$$

d'où $X_i \sim B(p^2)$, $E[X] = p^2$ et $Var(X) = p^2(1 - p^2)$.

b- Calculer $\mathbb{E}(X_i X_{i+1})$ puis $Cov(X_i, X_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq 2$.
Corrigé:

$$E[X_i X_{i+1}] = E[Y_i Y_{i+1}^2 Y_{i+2}] = p^2 E[Y_{i+1}^2] = p^3$$

car

$$Y_{i+1}^2 = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad Y_{i+1} = 1, \text{ donc avec probabilité } p \\ 0, & \text{avec probabilité} \quad 1 - p. \end{cases}$$

donc $Y_{i+1}^2 \sim B(p)$, $E[Y_{i+1}^2] = p$.

$$Cov(X_i, X_{i+1}) = E[X_i X_{i+1}] - E[X_i]E[X_{i+1}] = p^3 - p^4.$$

c- Sans calcul, que vaut $Cov(X_1, X_3)$?
Corrigé: $Cov(X_1, X_3) = 0$, car $X_1 = Y_1 Y_2$ et $X_3 = Y_3 Y_4$ sont indépendantes.

d- Calculer $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$.
Corrigé:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_1+X_2+X_3) &= \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)+2Cov(X_1,X_2)+2Cov(X_1,X_3)+2Cov(X_2,X_3) \\ &= 3p^2(1-p^2) + 4p^3(1-p). \end{aligned}$$

ETD-4-3 Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi $U(0,1)$. Déterminer la loi de X/Y.
Corrigé: Comme les deux v.a. sont positives alors leur rapport aussi, ainsi

$$P(\frac{X}{Y} \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq 0, \\ (*), & \text{sinon,} \end{cases}$$

Pour $t > 0$, $P(X \leq Yt) = \int\int_{D_t} 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(y) dxdy$, on doit distinguer deux cas (voir figure ci-dessous):
Si $0 < t \leq 1$, alors $P(X \leq Yt) = \int_0^1 \int_0^{ty} dxdy = \frac{t}{2}$.
Si $t > 1$, alors $P(X \leq Yt) = \int_0^1 \int_{x/t}^1 dydx = 1 - \frac{1}{2t}$. D'où

$$P(\frac{X}{Y} \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq 0, \\ \frac{t}{2}, & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2t}, & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

La densité vaut

$$f_{\frac{X}{Y}}(t) = \frac{1}{2} 1_{]0,1]}(t) + \frac{1}{2t^2} 1_{[1,\infty[}(t).$$

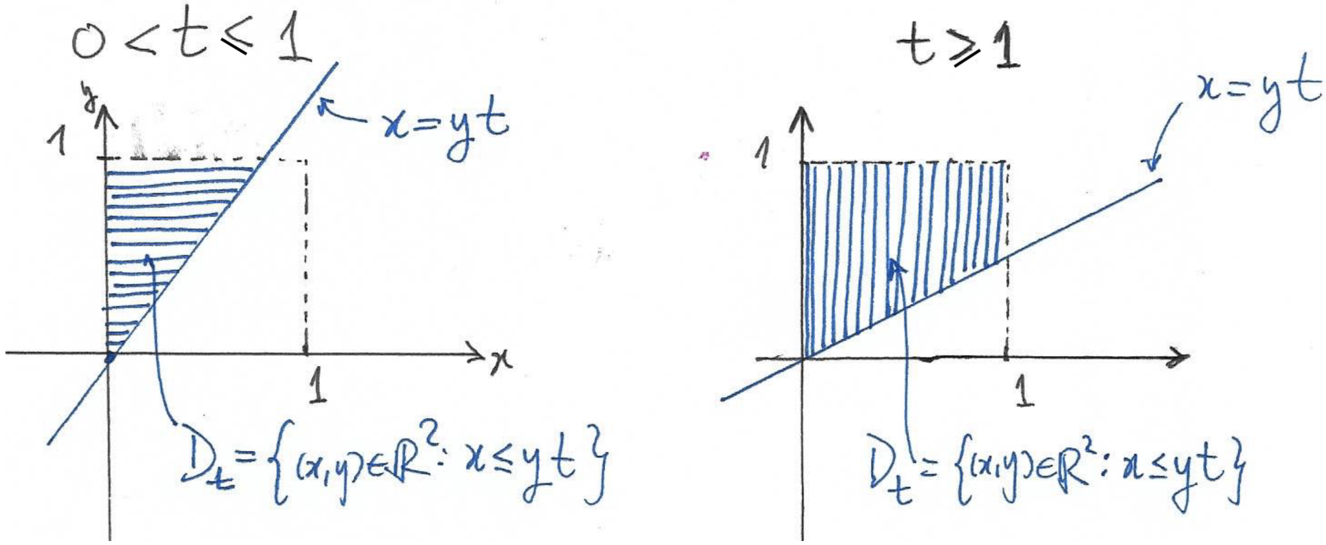

Figure 1: Figure exercice 3

ETD-4-4 Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & \text{si} \qquad |x|+|y| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

a- Déterminer k et les lois de X et Y.
Corrigé: Les bords du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x|+|y| \leq 1\}$ sont donnés par les droites $x+y=1$, $-x+y=1$, $x-y=1$ et $-x-y=1$ (voir figure ci-dessous). On doit avoir

$$1 = \int\int_D k dx dy \Longleftrightarrow 1 = kAire(D) = 4kAire(T_1)$$

où T_1 est par exemple le triangle sur le quadrant positif en x et y, T_1 est un triangle rectangle de côté 1, ainsi Aire$(T_1) = 1/2$, Aire$(D) = 2$ et $k = \frac{1}{2}$.
La densité (marginale) de X est donée par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy,$$

Si $|x| > 1$, $(x,y) \notin D$, $f_X(x) = 0$,
Si $|x| \leq 1$, $\forall (x,y) \in D$, $f_X(x) = \frac{1}{2}\int_{-(1-|x|)}^{(1-|x|)} dy = 1-|x|$.
Par symétrie, on obtiens la densité de Y.

b- Déterminer $Cov(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y.
Corrigé:

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)dx = 0$$

car $x(1-|x|)$ est impaire.

$$E[XY] = \frac{1}{2}\int\int_D xy dx dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \left(\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} y dy \right) dx = 0.$$

Ainsi $Cov(X,Y) = 0$, bien que X et Y ne soient pas indépendantes, puisque $\exists (x_0, y_0) \in D$ tel que $f_X(x_0) f_Y(y_0) \neq f(x_0, y_0)$, par exemple le point O.

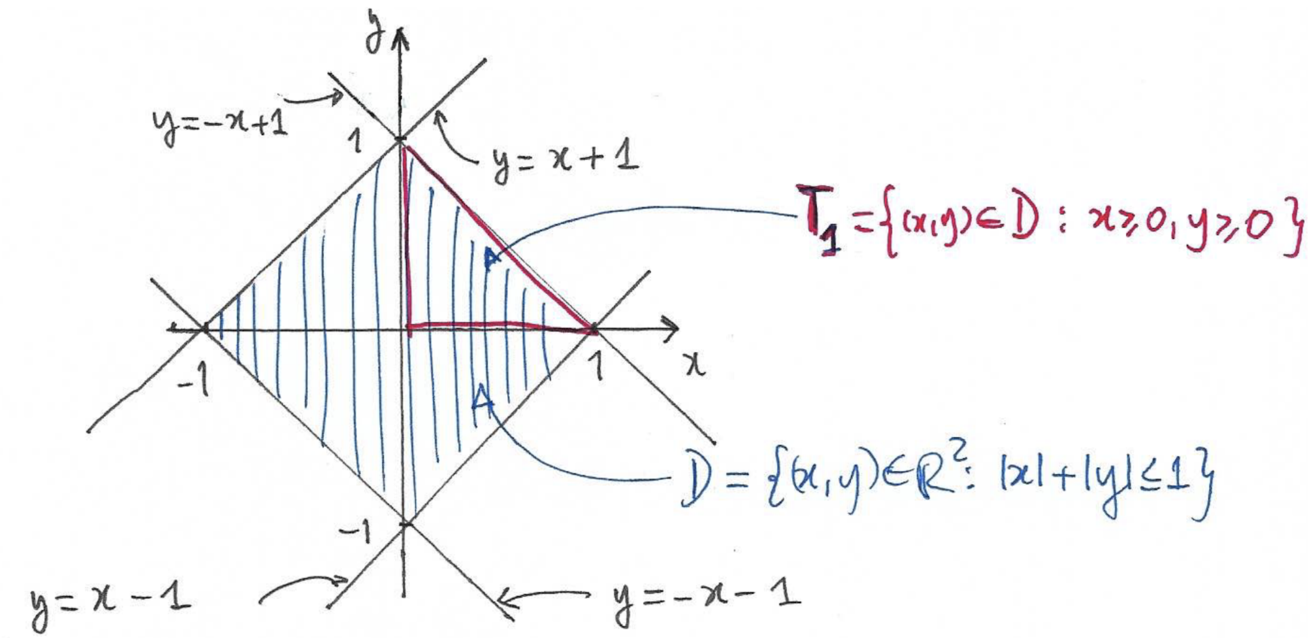

Figure 2: Figure exercice 4

ETD-4-16 On a une machine comprenant deux composants de durée de vie T_1 et T_2, respectivement. La densité conjointe est donnée par :

$$f(x,y) = c \exp\left(-(x+2y)\right),\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

a- Calculer la constante c.
Corrigé: $c > 0$ et $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dxdy = 1 \Longrightarrow c = 2$

b- i- La fonction de répartition conjointe.
Corrigé:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \left\{ \begin{array}{ccc} (*) & \text{si} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ $(*)$,

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^x 2e^{-(u+2v)} dudv = (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y}).$$

ii- Les fonctions de répartitions marginales.
Corrigé:

$$F_{T_1}(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = (1 - e^{-x}) 1_{\mathbb{R}^+}(x) \Longrightarrow T_1 \sim \varepsilon(1).$$

$$F_{T_2}(y) = \lim_{x \to \infty} F(x,y) = (1 - e^{-2y}) 1_{\mathbb{R}^+}(y) \Longrightarrow T_2 \sim \varepsilon(2).$$

iii- Les densités marginales ; est-ce que les v.a. sont indépendantes ?
Corrigé: Soit on dérive, soit on connaît les densités de la loi exponentielle de paramétre λ, ainsi $f_{T_1}(x) = e^{-x}1_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $f_{T_2}(y) = 2e^{-x}1_{\mathbb{R}^+}(y)$. Le produit des densités est égale en tout point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ à la densité du couple, on a l'indépendance.

c- Supposons que les deux composants sont connectés en série. Alors la durée de vie du système, notée T_0 est égale à $T_0 = \min(T_1, T_2)$. Trouver la fonction de répartition et la densité de T_0.
Corrigé: Pour $t \geq 0$

$$F_{T_0}(t) = P(T_0 \leq t) = 1 - P(T_0 > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) = 1 - e^{-3t},$$

on reconnaît la loi $\varepsilon(3)$, ainsi $f_{T_0}(t) = 3e^{-3t}1_{\mathbb{R}^+}(t)$.

d- Même question lorsque les composants sont connectés en parallèle, c.a.d. $T_0 = \max(T_1, T_2)$.
Corrigé: Pour $t \geq 0$

$$F_{T_0}(t) = P(T_0 \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) = (1 - e^{-t})(1 - e^{-2t})1_{\mathbb{R}^+}(t),$$

ainsi $f_{T_0}(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t})1_{\mathbb{R}^+}(t)$.