TD11 - Séance 2 du Chapitre 4

Exos : 7, 11, 13, 15, et 18 du Chapitre 4

ETD-4-7 Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même densité f définie par $f(x) = x^{-2}1_{[1,+\infty[}(x)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

a- Calculer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?
Corrigé: La densité du couple (X, Y) est

$$f(x, y) = x^{-2}y^{-2}1_{[1,+\infty[}(x)1_{[1,+\infty[}(y)$$

La densité de (U, V) est

$$h(u, v) = fog^{-1}(u, v)|Dg^{-1}|1_\Delta(u, v).$$

où g^{-1} l'application qui exprime les anciennes variables par rapport aux nouvelles variables, dans ce cas $x = \sqrt{uv}, y = \sqrt{\frac{u}{v}}$, il reste à calculer le Jacobien

$$|Dg^{-1}| = |-\frac{1}{2v}| = \frac{1}{2v}.$$

Enfin, le domaine $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ uv > 1, 0 < v < u\}$ (voire figure ci-dessous). Conclusion

$$h(u, v) = \frac{1}{u^2}\frac{1}{2v}1_\Delta(u, v).$$

Le domaine Δ n'étant pas un rectangle les v.a. U et V ne sont pas indépendantes.

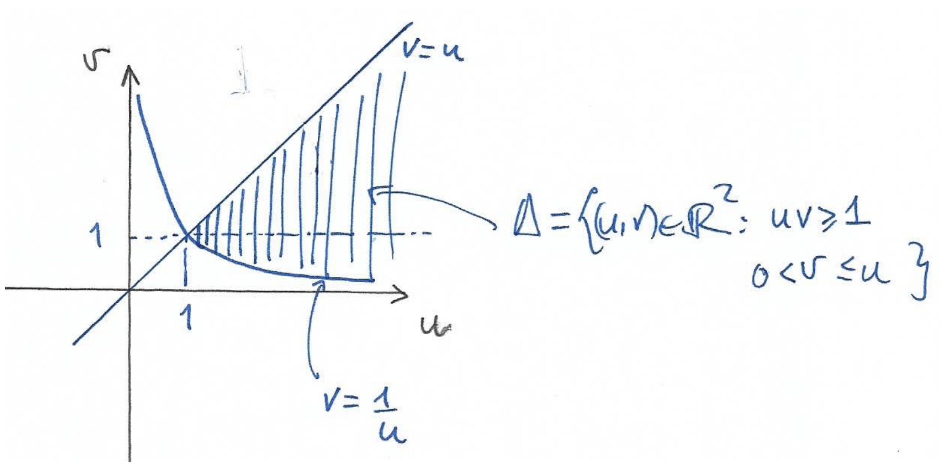

Figure 1: Figure exercice 7

b- Calculer les lois marginales de U et V.
Corrigé: Pour $u > 1$, $h_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v)dv = \frac{1}{2u^2}\int_{1/u}^{u} \frac{1}{v}dv = \frac{\ln u}{u^2}$.
Pour ce qui suit, il est important de répresenter le domaine, car on ne peut pas faire un seul calcul intégral. Pour $v > 0$,

$$h_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v)du = \frac{1}{2v}\left\{\int_{1/v}^{+\infty} \frac{du}{u^2}1_{]0,1[}(v) + \int_{v}^{+\infty} \frac{du}{u^2}1_{[1,+\infty[}(v)\right\}$$

$$h_V(v) = \frac{1}{2}1_{]0,1[}(v) + \frac{1}{2v^2}1_{[1,+\infty[}(v).$$

ETD-4-11 Soit (X, Y) le vecteur aléatoire de loi uniforme sur $D = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a- Calculer les densités de probabilités marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Corrigé: Le couple (X, Y) est de loi uniforme sur le disque, ainsi ($aire(D) = \pi r^2$, $r = 1$, voir Chapitre 1, p.10 du Poly)

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} 1_D(x, y)$$

La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} 1_{]-1,1[}(x).$$

La densité de Y est déduite par symétrie: $f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} 1_{]-1,1[}(y)$.
Les v.a. ne sont pas indṕendantes car $f_X(x) f_Y(y) \neq f(x, y)$, il suffit de le voir au point O par exemple.

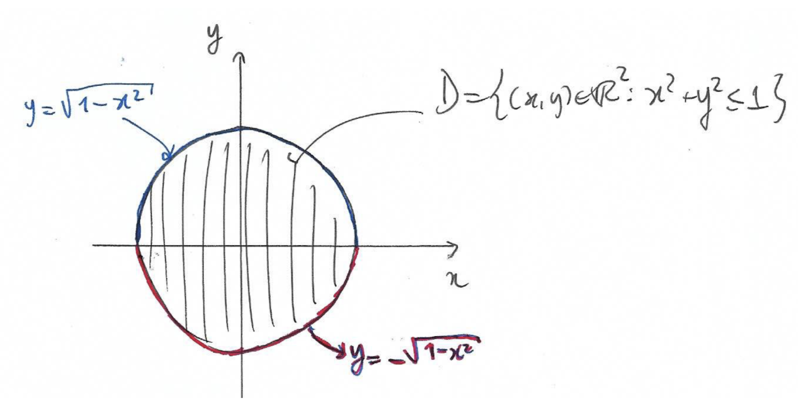

Figure 2: Figure exercice 11

b- On pose $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$ et $R > 0$. Calculer les lois marginales de R et Θ. R et Θ sont-elles indépendantes ?
Corrigé: La densité de (R, Θ) est

$$h(r, \theta) = fog^{-1}(r, \theta)|Dg^{-1}| 1_\Delta(r, \theta).$$

où g^{-1} l'application qui exprime les anciennes variables par rapport aux nouvelles variables, dans ce cas $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, il reste à calculer le Jacobien $|Dg^{-1}| = |r| = r$. Enfin, le domaine $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq r \leq 1, -\pi < \theta \leq \pi\}$. Conclusion

$$h(r, \theta) = \frac{1}{\pi} r 1_\Delta(r, \theta).$$

$h_R(r) = h(r, .) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{\pi} d\theta = 2r 1_{[0,1]}(r)$, et $h_\Theta(\theta) = h(., \theta) = \int_0^1 \frac{r}{\pi} dr = \frac{1}{2\pi} 1_{]-\pi,\pi]}(\theta)$.
Les variables R et Θ sont indépendantes car $\forall (r, \theta) \in D,\ h(r, \theta) = h_R(r) h_\Theta(\theta)$.

c- On pose $Z = X/(X^2+Y^2)$. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Z.
Corrigé: Z est une fonction de X et Y. De manière générale, pour $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue presque-partout et $Z = \alpha(X,Y)$

$$E[Z] = E[\alpha(X,Y)] = \int\int_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) f(x,y) dxdy.$$

Ainsi

$$E\left[\frac{X}{X^2+Y^2}\right] = \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{x^2+y^2} f(x,y)dxdy = \int\int_D \frac{x}{\pi(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{\pi} d\theta dr = 0.$$

On remarque que le calcul est assez simple en C. Polaires.

ETD-4-18 On considère un élément d'un système physique donné. On suppose que la durée de vie de cet élément (durée entre la mise en service et la première panne) est une variable aléatoire de loi exponentielle (loi de densité $\lambda e^{-x\lambda} \mathbb{1}_{R^+}(x)$ où $\lambda > 0$). Chaque fois que l'élément tombe en panne il est immédiatement remplacé par un autre dont la durée de vie est indépendante de celle des éléments précédents et de même loi exponentielle.
Soient $X_1, X_2, ...$ les durées de vie des éléments succesifs. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer, pour $n \geq 1$ fixé.

a- La loi de S_n (indication: procéder par récurrence sur $n \geq 1$).
Corrigé: La loi de $S_2 = X_1 + X_2$, peut être détérminée par produit de convolution, ainsi pour $t \geq 0$,

$$f_{S_2}(t) = (f_{X_1} * f_{X_2})(t) = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-(t-y)\lambda} e^{-y\lambda} \mathbb{1}_{R^+}(t-y)\mathbb{1}_{R^+}(y)dy = \lambda^2 e^{-t\lambda} \int_0^t dy = \lambda^2 e^{-\lambda t} t.$$

En fait, on a obtenu que la loi de S_2 est la loi Gamma de paramètres 2 et λ, noté $\gamma(2,\lambda)$. Supposons que S_{n-1} soit de loi $\gamma(n-1,\lambda)$ de densité

$$f_{S_{n-1}}(t) = \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2}}{\Gamma(n-1)} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$$

et montrons que S_n suit la loi $\gamma(n,\lambda)$,

$$f_{S_n}(t) = (f_{S_{n-1}} * f_{X_n})(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^{n-1}(t-y)^{n-2} e^{-\lambda(t-y)} \lambda e^{-\lambda y}}{\Gamma(n-1)} \mathbb{1}_{R^+}(t-y)\mathbb{1}_{R^+}(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^n (t-y)^{n-2} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n-1)} \mathbb{1}_{R^+}(t-y)\mathbb{1}_{R^+}(y)dy = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{\Gamma(n-1)} \int_0^t (t-y)^{n-2} dy = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}.$$

b- La loi du couple (S_n, X_{n+1}).
Corrigé: Les v.a. S_n et X_{n+1} étant indépendantes, la densité du couple est le produit des densités.

$$f_{(S_n, X_{n+1})}(x,y) = \frac{\lambda^{n+1} x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{R^+}(x)\mathbb{1}_{R^+}(y).$$

c- La probabilité $P(S_n \leq t < S_n + X_{n+1})$ où $t > 0$.
Corrigé: Commencer par remarquer que

$$P(S_n \leq t < S_n + X_{n+1}) = P(t - X_{n+1} < S_n \leq t)$$

puis

$$P(t - X_{n+1} < S_n \leq t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{t-X_{n+1}<S_n<t\}}\right] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{t-y<x\leq t\}} f_{(S_n,X_{n+1})}(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{t-y<x\leq t\}} \frac{\lambda^{n+1}y^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda y}e^{-\lambda x}dxdy = \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)}\int_0^t y^{n-1}e^{-\lambda y}\left(\int_{t-y}^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right)dy$$
$$= \frac{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}}{\Gamma(n+1)}.$$

Voir la Figure ci-dessous pour une représentation graphique du calcul de l'intégrale.

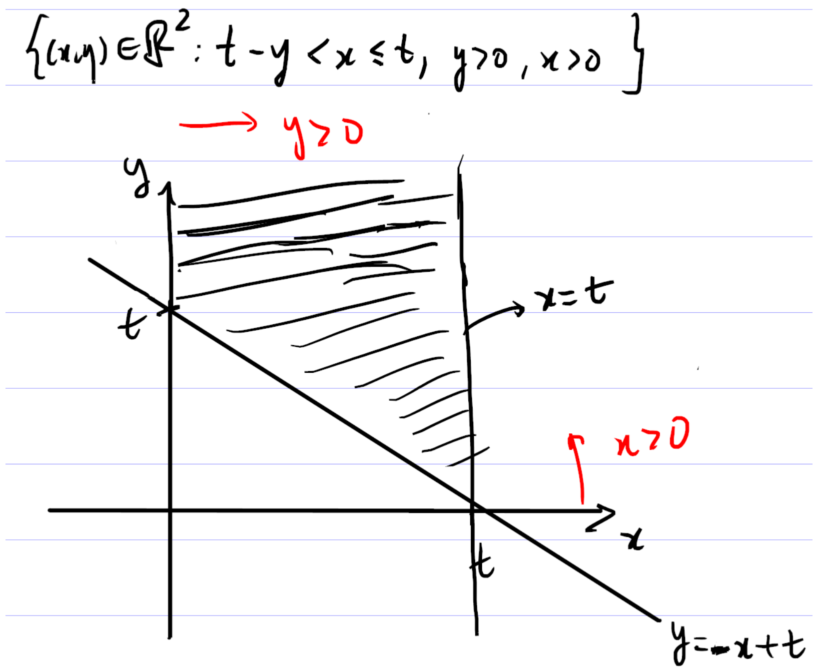

Figure 3: Figure exercice 18

Une autre méthode pour répondre à cette question est la suivante

$$\mathbb{P}(t - X_{n+1} < S_n \leq t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_n \leq t - X_{n+1}) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k - \left(1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\right) = \frac{1}{n!}e^{-\lambda t}(\lambda t)^n.$$

Nous avons utilisé l'expression des f.d.r. des lois $\gamma(n,\lambda)$ et $\gamma(n+1,\lambda)$ (À retrouver !).

d- La loi et l'espérance mathématique de la v.a. N représentant le nombre d'éléments utilisées en remplacement avant et jusqu'à l'instant t. (un calcul explicite est demandé, vous pouvez

utiliser le résultat obtenu en 3.)
Corrigé:

$$P(N=n) = P(S_n \le t < S_n + X_{n+1}) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

Alors N suit la loi Poisson(λt).
Remarque : Beaucoup d'arguments utilisés dans cet exercice sont basés sur la loi gamma et notions sous-jacentes, voir Poly p.65.

ETD-4-13 La densité conditionnelle de X en $\{Y=y\}$ $(y>1)$ est donnée par

$$f_{X|Y}(x|y) = xy^2 e^{-yx} 1_{]0,+\infty[}(x).$$

La loi de Y étant définie par $f_Y(y) = y^{-2} 1_{]1,+\infty[}(y)$. Pour $x>0$, calculer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X=x\}$, ainsi que $\mathbb{E}[Y \mid X]$.
Corrigé:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{avec} \quad f(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = xe^{-yx} 1_{\mathbb{R}^+}(x) 1_{[1,+\infty[}(y)$$

et $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = e^{-x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$. Ainsi, pour $x>0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{xe^{-yx} 1_{[1,+\infty[}(y)}{e^{-x}} = xe^{-x(y-1)} 1_{[1,+\infty[}(y).$$

Pour $x>0$,

$$\mathbb{E}[Y \mid X=x] = \int_1^\infty yxe^{-x(y-1)} dy = xe^x \int_1^\infty yxe^{-xy} dy = \frac{x+1}{x},$$

où on a fait une intégration par partie en posant $u=y$ et $v' = e^{-xy}$.
Finalement, comme la seule contrainte pour x est d'être positif, on peut conclure

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{X+1}{X}.$$

ETD-4-15 Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. discrètes indépendantes, de lois respectives $B(n_1,p)$ et $B(n_2,p)$.

a- Déterminer la loi de X_1 en $\{X_1+X_2=n\}$ en indiquant les valeurs possibles de n.
Corrigé: Pour $n \in \{0,\dots,n_1+n_2\}$ quelconque mais fixé et $0 \le k \le n_1$,

$$P(X_1=k \mid X_1+X_2=n) = \frac{P(X_1=k)\,P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}.$$

Conditionnellement à $\{X_1+X_2=n\}$, X_1 suit la loi Hypergeométrique, plus précisément $Hyp(n_1+n_2, n_1, n)$ et $P(X_1=k \mid X_1+X_2=n)$ peut être vue comme la probabilité de tirer exactement k boules noires au cours d'un tirage (sans remise) de n boules dans une urne de n_1+n_2 boules, dont n_1 sont noires.

b- Déterminer $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$.
Corrigé: Pour $0 \leq n \leq n_1$,

$$\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2 = n] = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n} = \frac{n_1 C_{n_1+n_2-1}^{n-1}}{C_{n_1+n_2}^n} = \frac{n_1 n}{n_1 + n_2},$$

où nous avons utilisé l'*Identité de Vandermonde* ($\forall m, n, k \in \mathbb{N}$, $\sum_i C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$) , qui implique que

$$\sum_{k=0}^{n} k C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k} = n_1 \sum_{k=1}^{n} k C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2}^{n-k} = n_1 \sum_{k'=0}^{n-1} C_{n_1-1}^{k'} C_{n_2}^{n-1-k'} = C_{n_1-1+n_2}^{n-1}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2] = \frac{n_1(X_1 + X_2)}{n_1 + n_2}.$$