**TD12 - Séance 1 du Chapitre 5**

**Exos : 2, 3, 4 et 7 du Chapitre 5**

ETD-5-2 Soit $Y$ une v.a. de densité : $be^{-x}1_{[2,\infty[}(x)$ où $b$ est une constante positive. (cf. exercice 3.11)

a- Déterminer la valeur de $b$.
**Corrigé:** cf. exercice 3.11
$b > 0$ et

$$b\int_2^\infty e^{-x}dx = 1 \Longrightarrow b = e^2.$$

b- On pose $X = Y - [Y]$, où $[Y]$ est la partie entière de $Y$. Calculer $E(X)$.
**Corrigé:** cf. exercice 3.11
Nous avons plusieurs manières de résoudre cet exercice.

Méthode 1 :
On pose $Z = [Y]$ c.a.d $Z$ est égale à la partie entière de $Y$. La v.a. $Z$ est à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ (v.a. discrète), et pour tout $k$ dans cet ensemble nous avons

$$P(Z = k) = P([Y] = k) = P(k \le Y < k+1) = b\int_k^{k+1} e^{-x}dx = e^2(1-e^{-1})e^{-k}.$$

Ensuite, par linéarité de l'espérance

$$E[X] = E[Y - [Y]] = E[Y] = E[[Y]]$$

or

$$E[Y] = e^2\int_2^\infty xe^{-x}dx = 3$$

où on a fait une intégration par parties.
Pour le calcul de $E[Z] = E[[Y]]$ on a

$$\begin{aligned} E[[Y]] &= \sum_{k=2}^{\infty} e^2ke^{-k}(1-e^{-1}) = e^2(1-e^{-1})\sum_{k=2}^{\infty} ke^{-k} \\ &= e^2(1-e^{-1})\left(\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} - e^{-1}\right) = e^2(1-e^{-1})\left(\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}\right) = \frac{2e-1}{e-1}. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que pour $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ et que sa dérivée vaut $\frac{1}{(1-x^2)}$, ainsi pour $x = e^{-1}$ on a le résultat.

$$E[X] = E[Y] - E[[Y]] = 3 - \frac{2e-1}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}.$$

Méthode 2 :

On peut aussi calculer l'espérance de $Z = \phi(Y)$ en utilisant le résultat $E[\phi(Y)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_Y(x) dx$, où $f_Y$ est la fonction de densité de la v.a. $Y$. Ce résultat, en prenant $\phi(x) = [x]$, conduit à

$$\begin{aligned} E[[Y]] &= \int_2^\infty [x] e^2 e^{-x} dx = \sum_{k=2}^\infty \int_k^{k+1} [x] e^2 e^{-x} dx = \sum_{k=2}^\infty \int_k^{k+1} k e^2 e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=2}^\infty k e^2 \int_k^{k+1} e^{-x} dx = \sum_{k=2}^\infty k e^2 \left( e^{-k} - e^{-k-1} \right). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation de Chasles pour le calcul intégral dans la troisième égalité. Pour le calcul de la derniére somme, nous avons aussi une maniére alternative de procéder par rapport á la prémière méthode.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^\infty k e^2 \left( e^{-k} - e^{-k-1} \right) &= e^2 \sum_{k=2}^\infty \left( k e^{-k} - k e^{-k-1} - e^{-k-1} + e^{-k-1} \right) \\ &= e^2 \sum_{k=2}^\infty \left( k e^{-k} - (k+1) e^{-(k+1)} \right) + e^2 \sum_{k=2}^\infty e^{-(k+1)} \\ &= e^2 \left( 2e^{-2} + e^{-3} \frac{1}{1 - e^{-1}} \right) = \frac{2e - 1}{e - 1}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule pour la série télescopique de terme général $-ke^{-k}$.

**Rappel :** Une somme télescopique est une somme dont le terme général est de la forme $a_{n+1} - a_n$ pour $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$ par simplification des termes consécutifs. Ainsi, si la suite $(a_n)$ converge, nous avons la convergence de la série télescopique, soit $\sum_{k=0}^\infty (a_{k+1} - a_k) = \lim a_n - a_0$.

Méthode 3 :

Une autre possibilité est de calculer la densité de la v.a. continue $X = Y - [Y]$, á valeurs dans $[0, 1[$. Nous pouvons calculer d'abord la fonction de répartition de $X$, que l'on note $F_X$ (on note également $F_Y$ la f.d.r. de $Y$). En appliquant la loi de probabilités totales par rapport à $[Y]$, nous avons pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y - [Y] \leq x) &= \sum_{k=2}^\infty \mathbb{P}(Y - [Y] \leq x \mid [Y] = k) \mathbb{P}([Y] = k) \\ &= \sum_{k=2}^\infty \mathbb{P}(Y \leq x + k) \mathbb{P}(k \leq Y < k+1) = \sum_{k=2}^\infty F_Y(x + k) \left( F_Y(k+1) - F_Y(k) \right). \end{aligned}$$

En supposant que les bonnes hypothèses sont satisfaites pour dériver des deux côtés de l'inégalité précédente (et pour l'échange de la dérivé et de la somme infinie), nous avons

$$
\begin{aligned}
f_X(x) = F'_X(x) &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} F_Y(x+k)\left(F_Y(k+1) - F_Y(k)\right)\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} F'_Y(x+k)\left(F_Y(k+1) - F_Y(k)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} f_Y(x+k)\left(F_Y(k+1) - F_Y(k)\right) = \sum_{k=2}^{\infty} f_Y(x+k) \int_k^{k+1} f_Y(x)dx \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} f_Y(x+k) e^2 \left(e^{-k} - e^{-k-1}\right).
\end{aligned}
$$

La densité $f_X$ est nulle en dehors de $[0,1[$. Ainsi, l'espérance de $X$ est

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \left(\sum_{k=2}^{\infty} f_Y(x+k)e^2\left(e^{-k} - e^{-k-1}\right)\right) dx \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} e^2\left(e^{-k} - e^{-k-1}\right) \int_0^1 x e^2 e^{-x-k} dx = \sum_{k=2}^{\infty} e^2\left(e^{-k} - e^{-k-1}\right) e^{2-k} \int_0^1 x e^{-x} dx \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} e^2\left(e^{-k} - e^{-k-1}\right) e^{2-k} = e^4\left(1 - 2e^{-1}\right) \sum_{k=2}^{\infty}\left(e^{-2k} - e^{-2k-1}\right) \\
&= e^4\left(1 - 2e^{-1}\right)\left(\frac{e^{-4}}{1-e^{-2}} - \frac{e^{-5}}{1-e^{-2}}\right) = \frac{e-2}{e-1}.
\end{aligned}
$$

Nous avons appliqué le théorème de Fubini pour l'échange de l'intégrale et de la somme infinie.

c- Soient $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots$ des v.a. indépendantes. On suppose que pour $n \geq 0$, $X_n$ suit la loi de $X$, et $Y_n$ celle de $Y$. Etudier la convergence presque sûre de

$$\frac{X_1 - Y_1 + X_2 - Y_2 + \cdots + X_n - Y_n}{n}$$

lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé:**

$$\frac{X_1 - Y_1 + X_2 - Y_2 + \cdots + X_n - Y_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$$

par le loi forte des grands nombres le premier terme du membre de droite converge p.s. vers $E[X_1] = \frac{e-2}{e-1}$ et le deuxième converge p.s. vers $E[Y_1] = 3$, lorsque $n \longmapsto \infty$. Ainsi $\frac{X_1-Y_1+X_2-Y_2+\cdots+X_n-Y_n}{n} \longmapsto \frac{e-2}{e-1} - 3 = \frac{1-2e}{e-1}$ p.s., lorsque $n \to +\infty$.
On aurai pu utiliser la LFGN, car $(X_n - Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes admettant des moyennes finies.

ETD-5-3 Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant une moyenne $\mu$ et une variance $\sigma^2 < +\infty$. On note $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

a- Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

**Corrigé:**

$$E[S_n] = \frac{E[\sum_{i=1}^n X_i]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu,\ Var(S_n) = \frac{Var(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2} = \frac{nVar(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

b- Lorsque $n$ tend vers l'infini, vers quoi converge la suite $S_n$ et en quel sens (justifier la réponse) ?

$$S_n \longmapsto \mu,$$

en probailité et p.s. car la loi faible et la loi forte des grands nombres s'appliquent.

c- Pour $n$ "grand", par quelle loi peut-on approcher $\dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$ (justifier la réponse) ?

**Corrigé:** Les hypothéses du TCL étant satisfaites, on a pour $n$ "grand"

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

d- En déduire une approximation de $P(S_n \le x)$.

**Corrigé:**

$$P(S_n \le x) = P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \le \frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \approx \phi_X(\frac{\sqrt{n}(x-\mu)}{\sigma}).$$

où $X$ est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition $\phi_X$, notation standard.

e- Soit $X \sim B(n,p)$. Donner une approximation de $P(X/n \le x)$ pour $n$ grand. Par quelle loi préfère-t-on approcher la loi de $X$ lorsque $p \ll np \ll n$ (le symbôle $\ll$ signifie "très inférieur à") ?

**Corrigé:** En utilisant la question précédente, on en déduit

$$P(X/n \le x) \approx \phi_Z(\frac{\sqrt{n}(x-p)}{\sqrt{p(1-p)}}).$$

où $Z$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Lorsque $p \ll np \ll n$, la loi $B(n,p)$ est approchée par la loi $\mathcal{P}(np)$, cette approximation préserve la structure discrète de la loi d'origine.

ETD-5-4 Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires telle que :

a- $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \in \mathbb{R}$ ;

b- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$.

Montrer que la suite $\{X_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\mu$.

**Corrigé:** Pour démontrer la convergence en probabilité nous devons étudier, pour $\epsilon > 0$, la limite quand $n \to \infty$ de $P(|X_n - \mu| > \epsilon)$. Il n'est pas possible d'appliquer l'inégalité de Tchebychev directement, car on ne connaît pas $E[X_n]$. En utilisant les propriétés de la probabilité, nous pouvons faire comme suit

$$\begin{aligned}
P(|X_n - \mu| > \epsilon) &= P(|X_n - E[X_n] + E[X_n] - \mu| > \epsilon) \\
&\le P(|X_n - E[X_n]| + |E[X_n] - \mu| > \epsilon) \\
&\le P\left(\{|X_n - E[X_n]| > \epsilon/2\} \cup \{|E[X_n] - \mu| > \epsilon/2\}\right) \\
&\le P(|X_n - E[X_n]| > \epsilon/2) + P(|E[X_n] - \mu| > \epsilon/2).
\end{aligned}$$

Remarquons que l'évènement du deuxième terme n'est pas aléatoire : en effet l'ensemble $\{\omega \in \Omega : |E[X_n] - \mu| > \epsilon/2\}$ est égal à $\Omega$ ou $\emptyset$ selon les valeurs de $n$, et par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, ce sera $\emptyset$ à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, donc le deuxième tends vers 0, lorsque $n \longmapsto \infty$.

Quant au premier terme par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|X_n - E[X_n]| > \epsilon/2) \leq \frac{4Var(X_n)}{\epsilon^2}.$$

qui par hypothèse tends vers 0, lorsque $n \longmapsto \infty$.

ETD-5-7 Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de lois normales de moyennes $\mu \in \mathbb{R}$ et de variances $\sigma^2 \in ]0, +\infty[$. Soit $X$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

a- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-\varepsilon^2/2).$$

**Corrigé:**

$$P(|X| \geq \varepsilon) = P(X \geq \epsilon) + P(X \leq -\epsilon) = 2P(X \geq \epsilon)$$

par la symétrie de la loi normale. Or

$$2P(X \geq \epsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\epsilon}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{x}{\epsilon}e^{-x^2/2}dx \text{ ( car } \frac{x}{\epsilon} \geq 1)$$

$$= \frac{2}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\int_{\epsilon}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\epsilon\sqrt{2\pi}}[-e^{x^2/2}]_{\epsilon}^{\infty} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-\varepsilon^2/2).$$

b- On note $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $S_n$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U_n = \sqrt{n}(S_n - \mu)/\sigma$ ?

**Corrigé:**

$$E[S_n] = \frac{E[\sum_{i=1}^n X_i]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu,\ Var(S_n) = \frac{Var(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2} = \frac{nVar(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ainsi, $U_n = \sqrt{n}(S_n - \mu)/\sigma$ est une variable de loi Normale centée et réduite notée $N(0,1)$. Bien remarquer qu'il n'y a pas de passage à la limite (propriétés de la loi Normale).

c- Soit $a > 0$. Déduire des deux questions précédentes que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|S_n - \mu| > a\right) = 0.$$

**Corrigé:**

$$P\left(|S_n - \mu| > a\right) = P\left(\frac{|S_n - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P(|U_n| > \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}) \leq \frac{\sigma}{a\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-a^2n/2\sigma^2)$$

l'inégalité vient de a) et ce dernier terme tends vers 0, lorsque $n \longmapsto \infty$.

d- On suppose toujours les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes et identiquement distribuées, de moyennes $\mu \in \mathbb{R}$, de variances $\sigma^2 \in ]0, +\infty[$ mais de loi quelconque. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, montrer que le résultat de la question précédente reste vrai.

**Corrigé:**

$$P\left(|S_n - \mu| > a\right) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 n} \longmapsto 0,\ n \longmapsto \infty.$$

La convergence est moins rapide que celle de la question c).

e- Que se passe-t-il si $X_i = X$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ ? Quelle hypothèse fondamentale n'est pas satisfaite dans ce cas ?

**Corrigé:**

$$S_n = \frac{nX}{n} = X,\ E[S_n] = 0,\ Var(S_n) = 1$$

on ne peut pas utiliser le TCL car on n'a pas l'indépendance. On peut utiliser le a), mais on n'aura pas la convergence en $n$.