TD13 - Séance 2 du Chapitre 5

Exos : 8, 9, 13 et 15 du Chapitre 5

ETD-5-8 Dans une usine on produit des résistances dont la valeur en Ohms suit une loi normale de moyenne 100 et de variance 0,26. On considère qu'une résistance est commercialisable si sa valeur est de 100 Ohms à 1% près.

a- Quelle est la probabilité p qu'une résistance soit commercialisable ?
Corrigé:

$$
\begin{aligned}
P(99 \leq X \leq 101) &= P\left(\frac{99-100}{\sqrt{0.26}} \leq \frac{X-100}{\sqrt{0.26}} \leq \frac{101-100}{\sqrt{0.26}}\right) \\
&= P\left(|Y| \leq \frac{1}{\sqrt{0.26}}\right) \text{ où } Y = \frac{X-100}{\sqrt{0.26}} \sim N(0,1), \\
&= 2\Phi_Y(\frac{1}{\sqrt{0.26}}) - 1 = 2\Phi_Y(1.961) - 1 = 1.95 - 1 = 0.95 = p.
\end{aligned}
$$

b- Les résistances sont fabriquées indépendamment les unes des autres par lots de taille n. On note S_n le nombre de résistances commercialisables dans un lot de taille n. Quelle est la loi de S_n ? sa moyenne ? sa variance ?
Corrigé:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\left\{|Y_i| \leq \frac{1}{\sqrt{0.26}}\right\}}$$

ainsi $S_n \sim B(n,p)$, $E[S_n] = np$, $Var(S_n) = np(1-p)$, avec $p = 0.95$.

c- Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. Donner, pour n grand, une approximation de $P(X \leq x)$ en fonction de n,p, x et Φ (Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite).
Corrigé: Les hypothèses du TCL étant vérifiées, on a

$$P(X \leq x) = \left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \approx \Phi_Z\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

où $Z \sim N(0,1)$.

d- Quelle est la taille minimale des lots qui assure qu'au moins 99% des lots contiennent plus de 90% de resistances commercialisables ?
Corrigé:

$$P(S_n \geq 0.9n) \geq 0.99 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{0.9n - 0.95n}{\sqrt{n \times 0.95 \times 0.05}}\right) \geq 0.99 \Rightarrow 0.01 \geq \Phi(-0.229\sqrt{n})$$

$$\Leftrightarrow \Phi(-2.232) \geq \Phi(-0.229\sqrt{n}) \Leftrightarrow -2.232 \geq -0.229\sqrt{n} \Rightarrow n \geq (9.74)^2 \approx 95.$$

Bien remarquer que la dernière équivalence est due au fait que $\Phi(.)$ est une fonction de rṕartition, donc elle est croissante.

Calculs numériques : $\Phi(1,961) \approx 0,975$ et $\Phi(-2,232) \approx 0,01$.

ETD-5-9 Soit Y une v.a. réelle uniformément distribuée sur l'intervalle $[3,6]$. Pour tout $n>0$, on pose $X_n=5n^2$, si $3\leq Y\leq 3+(4/n^2)$ et $X_n=0$, sinon. (cf. exercice 3.14)

a- Déterminer $E(X_n)$ et $E(X_n^2)$.
Corrigé: cf. exercice 3.14

$$X_n=5n^2 1_{[3,3+\frac{4}{n^2}]}(Y),$$

Ainsi, pour $n\geq 2$, on a

$$E[X_n]=5n^2E[1_{[3,3+\frac{4}{n^2}]}(Y)]=5n^2P(3\leq Y\leq 3+\frac{4}{n^2})$$

$$=5n^2\int_3^{3+\frac{4}{n^2}}\frac{1}{3}dt=\frac{5n^2 4}{3n^2}=\frac{20}{3}.$$

Pour $n=1$, on a

$$E[X_1]=5P(3\leq Y\leq 7)(*)=5\int_3^6\frac{1}{3}dt=5.$$

Pour $n\geq 2$

$$E[X_n^2]=25n^4P(3\leq Y\leq 3+\frac{4}{n^2})=\frac{100}{3}n^2.$$

Pour $n=1$,

$$E[X_1^2]=25P(3\leq Y\leq 7)(*)=25.$$

Bien remarquer que $(*)$ est due au fait que la v.a. Y est telle que $Y(\Omega)=[3,6]$.

b- Calculer $E(X_{n+1}X_{n+2})$.
Corrigé: cf. exercice 3.14

$$E[X_{n+1}X_{n+2}]=25(n+1)^2(n+2)^2P(3\leq Y\leq 3+\frac{4}{(n+2)^2})=\frac{100}{3}(n+1)^2.$$

c- La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle p.s. vers une limite ?
Corrigé: Soit $\Omega_0=\{w\in\Omega;\ 3<Y(w)\leq 6\}$, on a $P(\Omega_0)=1$.
$\forall w\in\Omega_0$, posons $n_0=n_0(w)=\lceil\frac{2}{\sqrt{Y(w)-3}}\rceil$ alors pour $n\geq n_0$, $Y(w)>3+\frac{4}{n^2}$, c.a.d. $X_n(w)=0$ dès que $n>n_0$.
Par conséquent

$$P(w\in\Omega;\ \lim_{n\longrightarrow\infty}X_n(w)=0)=1\Longleftrightarrow X_n\longrightarrow 0,p.s.$$

d- La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle en probabilité vers une limite ?
Corrigé: La convergence p.s. entraîne la convergence en probabilité, on a $X_n\longrightarrow 0,p.$

ETD-5-13 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\alpha(1-x)^\beta 1_{[0,1]}(x),$$

où $\beta>0$.

a- Calculer α pour que f soit une densité.
Corrigé: $\alpha > 0$ et

$$\alpha \int_0^1 (1-x)^\beta dx = 1 \Leftrightarrow -\alpha \int_1^0 u^\beta du = 1 \Rightarrow \alpha = \beta + 1$$

où on a fait le changement de variables $u = 1 - x$.

b- Donner un algorithme permettant de simuler des v.a. de densité f.
Corrigé: On génére n réalisations indépendantes de la variable $Y \sim U(]0,1[)$ et on calcule $x_i = F^{-1}(y_i) = 1 - (1-y_i)^{1/(\beta+1)}$, on obtient ainsi n réalisations de la variable X. On a utilisé le fait que pour $x \in]0,1[$, $F(x) = F_X(x) = 1 - (1-x)^{\beta+1}$.

c- Soit $\lambda > \beta$ fixé. Donner un algorithme permettant d'approcher l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^1 (1-u)^\lambda du.$$

Corrigé: Posons, $I = \int_0^1 h(u)f(u)du$. On sait par la LFGN que

$$\frac{h(X_1) + \ldots + h(X_n)}{n} \longmapsto I, p.s., \ n \to \infty,$$

il ne reste qu'à déterminer la fonction $h(.)$. On sait que

$$I = E[h(X)] = (\beta+1) \int_0^1 h(u)(1-u)^\beta du \Leftrightarrow h(x) = \frac{(1-x)^{\lambda-\beta}}{\beta+1}.$$

ETD-5-15 On jette indéfiniment un dé équilibré. On note $X_1, X_2, \ldots$ les résultats successifs obtenus et $M_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.

a- Soit $\varepsilon \in]0,1[$, exprimer l'événement $\{|M_n - 1| > \varepsilon\}$ à l'aide de $X_1, \ldots, X_n$ (traiter $n = 1$ et $n = 2$ puis généraliser).

b- Montrer que $(M_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{P} 1$. Peut-on en déduire la convergence presque-sûre de $(M_n)_{n\geq 1}$ vers 1 (justifiez votre réponse sans chercher à justifier une éventuelle convergence presque-sûre) ?
Corrigé: Remarquons que pour tout $n \geq 1$ on a $M_n \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Alors on a $\{|M_1 - 1| > \varepsilon\} = \{|X_1 - 1| > \varepsilon\} = \{X_1 \geq 2\}$;
$\{|M_2 - 1| > \varepsilon\} = \{|\min\{X_1, X_2\} - 1| > \varepsilon\} = \{X_1 \geq 2; X_2 \geq 2\}$;
$\{|M_n - 1| > \varepsilon\} = \{|\min\{X_1, \ldots, X_n\} - 1| > \varepsilon\} = \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} < 1 - \varepsilon\} \cup \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} > 1 + \varepsilon\} = \{\min\{X_1, \ldots, X_n\} \geq 2\} = \{X_1 \geq 2; \ldots; X_n \geq 2\}$.
$P(|M_n - 1| > \varepsilon) = P(X_1 \geq 2; \ldots, X_n \geq 2) = P(X_1 \geq 2) \times \cdots \times P(X_n \geq 2) = (5/6)^n$
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(|M_n - 1| > \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} (5/6)^n = 0 \Rightarrow (M_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{P} 0$ quand $n \to +\infty$.
Comme la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité mais que la réciproque est fausse en général, on ne peut pas en déduire la convergence presque sûre.