SY01 / A21 - FINAL

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(8 points)*

Pour tout nombre réel $b > 0$, on définit l'application f_b sur $\mathbb{R}$ par

$$f_b(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2bte^{-bt^2}, & t \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, l'application f_b est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f_b pour densité. Pour la suite, cette f.d.r sera notée F_b.
3. Si u est une réalisation d'une v.a. uniforme sur $[0, 1]$, donner une réalisation de X en fonction de u.
4. Pour $b = 1/2$, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.
5. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, avec $b > 0$.

   On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. indépendantes, où X_n suit la loi de f.d.r. F_{b_n}.

   On définit $(Y_n)_{n\geq 1}$, une suite de v.a. réelles telles que pour tout $n \geq 1$, $Y_n := X_n^2$.

   (a) Déterminer la f.d.r. de Y_n, que l'on notera F_{Y_n}. S'agit-il d'une loi connue ?

   (b) Trouver la limite de $F_{Y_n}(x)$ quand $n \to +\infty$, elle sera notée $G(x)$.

   (c) La fonction G vérifie-t-elle les propritétés d'une fonction de répartition ?

   (d) En déduire la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vers une v.a. Y dont on précisera la loi.

Solution Exercice I:

1. Pour tout $b > 0$ la fonction f_b est continue (et donc intégrable) et $f_b(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il reste à vérifier que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1, soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2bte^{-bt^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = -e^{-y}\Big|_0^{+\infty} = 1 + \lim_{x\to+\infty} -e^{-y} = 1,$$

   où nous avons utilisé le changement de variable $y = bt^2$.

2. Nous avons, pour $x > 0$

$$F_b(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_b(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} 2bte^{-bt^2}\mathrm{d}t = \int_0^{bx^2} e^{-y}\mathrm{d}y = -e^{-y}\Big|_0^{bx^2} = 1 - e^{-bx^2},$$

   où nous avons utilisé le même changement de variable $y = bt^2$. Donc $F_b(x) = \left(1 - e^{-bx^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

3. Pour $x \geq 0, u \in (0,1)$,

$$F_b(x) = u \Longleftrightarrow 1 - e^{-bx^2} = u \Longleftrightarrow x = \left(-\frac{1}{b}\log(1-u)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par la méthode de la réciproque, nous avons que si $u = U(\omega)$ est une réalisation de la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $X(\omega) = \left(-\frac{1}{b}\log(1-u)\right)^{\frac{1}{2}}$ est une réalisation de X.

4. Pour $b = 1/2$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = (-te^{-\frac{t^2}{2}})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

où nous avons fait d'abord une I.P.P. Dans la dernière égalité nous avons utilisé que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et que celle-ci est symétrique.

De manière similaire nous obtenons que

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = (-t^2 e^{-\frac{t^2}{2}})\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = 2.$$

Donc

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ nous allons trouver la f.d.r. de la v.a. Y_n, que nous allons noter F_{Y_n}. Les v.a. Y_n et X_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors pour $y \geq 0$

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}\left(X_n^2 \leq y\right) = \mathbb{P}(X_n \leq \sqrt{y}) = F_{b_n}(\sqrt{y}) = 1 - e^{-b_n y}.$$

(b) En passant à la limite de la suite de f.d.r., comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim b_n = b > 0$, nous avons que pour $y > 0$

$$\lim F_{Y_n}(y) = \lim 1 - e^{-b_n y} = 1 - e^{-by} =: G(y).$$

Et $G(y) = 0$ pour $y \leq 0$.

(c) Oui, la fonction G est la f.d.r. de la loi exponentielle de paramètre b, donc elle est croissante, continue et $\lim_{y\to-\infty} G(y) = 0$, $\lim_{y\to+\infty} G(y) = 1$

(d) Alors , par la définition de la convergence en loi, la suite de v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers une v.a. Y de loi exponentielle de paramètre b car G est la f.d.r. de cette loi.

Exercice II *(6 points)*

On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est sans mémoire si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\mathbb{P}(T > s)$$

1. Vérifier qu'une v.a. T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une v.a. sans mémoire.

2. Soient T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, calculer la loi de $T_1 + T_2$ en utilisant le produit de convolution.

3. Si Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramétre λt, montrer que $P(Z < 2) = P(T_1 + T_2 > t)$.

4. Soient $n \geq 1$ et $T_1, \ldots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

   (a) On pose $U_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$. Déterminer la loi de U_n. S'agit-il d'une loi connue ? *Indication : calculer d'abord "$1-$ la fonction de répartition".*

   (b) On pose $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Étudier la limite de la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ quand $n \to +\infty$ en précisant le mode de convergence et le résultat utilisé.

5. Problème: Un ingénieur en informatique doit estimer le temps pour la réalisation d'un projet qui contient 100 fonctions. Le temps de codage (en jours) de chaque fonction est aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. L'ingénieur code les fonctions de manière indépendante, l'une après l'autre.
   N.B. Ici le temps est continu : un temps de 1.2 *jours correspond à* 1 *jour et* 0.2 *du jour suivant.*

   (a) Quelle est le temps moyen pour la réalisation de ce projet ? Quelle est la loi exacte de la durée totale du projet ?

   (b) L'ingénieur doit donner à son client un nombre de jours n ($n \in \mathbb{N}$) pour la réalisation du projet, de telle sorte que la probabilité de ne pas avoir terminé après n jours soit inférieure à 2.5%. Déterminer une valeur approchée de ce nombre n en utilisant une approximation de la loi du temps de réalisation du projet. Justifier.
   Indication : $\phi(1.96) \sim 0.975$*, où* ϕ *est la f.d.r. de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Solution Exercice II:

1. En utilisant la f.d.r. de la loi exponentielle, nous avons que $\mathbb{P}(T > t) = \exp(-\lambda t)$, ce qui permet de vérifier que cette loi est sans mémoire.

2. En utilisant le produit de convolution, nous avons pour $t > 0$

$$\begin{aligned}
f_{T_1+T_2}(t) = (f_{T_1} * f_{T_2})(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_1}(t-y) f_{T_2}(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t-y) e^{-\lambda(t-y)} \lambda \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) e^{-y}\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda(t-y)} e^{-\lambda y}\mathrm{d}y = \lambda^2 t e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

   Alors $f_{T_1+T_2}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$.

3. D'après la question précédente nous avons que

$$P(T_1 + T_2 > t) = \int_t^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x} x dx = -\lambda x e^{-\lambda x}\Big|_t^{\infty} + P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}\lambda t + e^{-\lambda t}$$

   où nous avons fait une intégration par parties. Par ailleurs $P(Z < 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\lambda t$.

4. (a) Nous allons d'abord calculer la f.d.r. de U_n. Nous avons $\mathbb{P}(U_n \leq x) = 0$ pour $x < 0$, et pour $x > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_n \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(U_n > x) = 1 - \mathbb{P}(\min(T_1, \ldots, T_n) > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_1 > x, \ldots, T_n > x) = 1 - (\mathbb{P}(T_1 > x))^n \\ &= 1 - \left(e^{-\lambda x}\right)^n = 1 - e^{-\lambda n x}.\end{aligned}$$

Alors U_n suit la loi exponentielle de paramètre λn.

(b) La suite $(T_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. et $\mathbb{E}[T_1] = 1/\lambda$, donc par la LFGN,

$$M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{\lambda}, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

5. (a) Nous pouvons considérer la suite $(T_i)_{i\geq 1}$ des temps de codage de chacune des fonctions, soit T_i le temps de codage de la fonction i, pour $i = 1, \ldots, 100$. Le temps pour la réalisation du projet est alors $T = \sum_{i=1}^{100} T_i$. D'après les résultats du cours, nous savons que T suit la loi $\gamma(n, 1)$. De plus, par les propriétés de l'espérance

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[T_i] = 100 \times 1 = 100.$$

(b) La suite $(T_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. de moyenne 1 et de variance 1, donc le T.L.C. nous dit que

$$\sqrt{N}\left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i - 1}{1}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

où Z est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Comme $N = 100$ est assez grand, on peut approcher la variable aléatoire $\frac{T-100}{10}$ par la variable aléatoire Z. Ainsi,

$$\begin{aligned}P(T \geq n) \leq 0.025 &\Longleftrightarrow P\left(\frac{T-100}{10} \geq \frac{n-100}{10}\right) \leq 0.025 \\ &\Longleftrightarrow P\left(\frac{T-100}{10} \leq \frac{n-100}{10}\right) \geq 0.975.\end{aligned}$$

Par les propritétés de la loi normale, ceci équivaut à trouver le plus petit n tel que $\frac{n-100}{10} \geq 1.96$, soit $n \geq 1.96 \times 10 + 100 = 119.6$, soit $n = 120$.

Exercice III *(6 points)*

Soit (X, Y) un couple aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer C. S'agit-il d'une loi connue ?

2. Calculer les densités marginales de X et de Y. Sont X et Y indépendantes?

3. Déterminer sans calcul (en justifiant soigneusement) $\mathbb{P}(X+Y \le 0)$ et $\mathbb{P}(X \ge 0, Y \ge 0)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X|Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$.

5. Soient (R, Θ) tels que $R \ge 0$, $\Theta \in [0, 2\pi[$ et $X = R\sin(\Theta)$, $Y = R\cos(\Theta)$. Calculer la densité du couple (R, Θ) et montrer que R et Θ sont indépendantes.

Solution Exercice III:

1. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Nous devons trouver la valeur de C telle que $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D C\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \iff C \times \text{Aire}(D) = 1$, soit $C = 1/\pi$. Alors le couple (X,Y) suit la loi unifirme sur D.

2. On calcule la densité marginale de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

Par symétrie

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y).$$

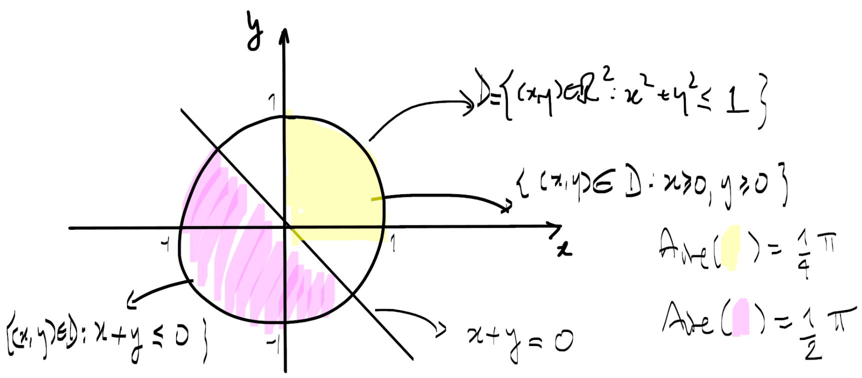
Nous avons $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, ce qui implique que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Nous pouvons réfléchir par symétrie, car nous avons $(X,Y) \sim (X,-Y) \sim (-X,Y) \sim (-X,-Y)$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(X+Y \le 0) + \mathbb{P}(X+Y > 0) = \mathbb{P}(X+Y \le 0) + \mathbb{P}((-X)+(-Y) > 0) \\ &= 2\mathbb{P}(X+Y \le 0). \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{P}(X+Y \le 0) = 1/2$. Par un calcul analogue on obtient que $\mathbb{P}(X \ge 0, Y \ge 0) = 1/4$.

On obtient le même résultat par des arguments géométriques. Nous savons que (X,Y) suit la loi uniforme sur D, donc pour tout ensemble $A \in D$, $\mathbb{P}(A) = \text{Aire}(A)/\pi$. On obtient le résultat en calculant les aires des régions rose et jaune ci-dessous.



4. Pour calculer l'espérance et la variance conditionnelle il nous faut la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, soit

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathbb{1}_{\{x^2+y^2<1\}}}{2\sqrt{1-y^2}}.$$

Nous avons

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{]1,1[}(y) = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2|Y=y] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{]1,1[}(y) \\ &= \frac{(1-y^2)}{3} \mathbb{1}_{]1,1[}(y).\end{aligned}$$

On obtient finalement $\mathbb{E}[X|Y] = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X|Y) = \frac{1-Y^2}{3}$.

5. Ici (R, Θ) correspondent au changement de variables en coordonnées polaires de (X, Y). Nous savons que le jacobien de cette transformation est $|DJ_{g^{-1}}(r,\theta)| = r$, alors par le théorème de transformation d'un couple aléatoire, la densité de (R, Θ) est

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{\pi} r \mathbb{1}_{\{0\le r\le 1\}} \mathbb{1}_{\{0\le\theta<2\pi\}} = 2r\mathbb{1}_{\{0\le r\le 1\}} \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{\{0\le\theta<2\pi\}}.$$

Ce qui montre que

$$f_R(r) = 2r\mathbb{1}_{\{0\le r\le 1\}} \quad \text{et} \quad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{\{0\le\theta<2\pi\}},$$

et les variables R et Θ sont indépendantes.