SY01 / A21 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Rendre une copie par Partie (même si elle est blanche)

Rappels séries numériques

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ pour } x \in]-1,1[. \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Partie I *(changer de copie)*

Exercice I *(8 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et B deux évènements.

1. Montrer que si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les paires d'évènements (a) A et $\overline{B}$, (b) $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2. On considère A et B indépendants et tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$. Déterminer les lois des variables aléatoires $X = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ et $Y = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. S'il s'agit des lois connues, les identifier.

Considérons maintenant A, B, C, trois évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 1/2,\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 5/12$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/3,\ \mathbb{P}(A \cap C) = 1/4,$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4$.

3. Déterminer la loi de $Z = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.

4. Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Z.

Exercice II *(3 points)*

On lance une pièce de monnaie indéfiniment et de manière indépendante jusqu'à obtenir pile pour la première fois. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir pile est égale à p ($p \in]0,1[$). Soit X le rang du tirage où l'on obtient le dernier face qui précède pile.

1. Identifier la loi de $X + 1$, puis déterminer la loi de X.

2. Calculer la fonction génératrice de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(Tourner la page et changer de copie)

Partie II *(changer de copie)*

Exercice III *(6 points + 2 points bonus)*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire successivement deux boules au hasard, de manière indépendante et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$.

2. En déduire la loi de la variable aléatoire X. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.

3. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X-1}\right]$.

On considère maintenant le même problème, mais on tire successivement m boules, avec m un entier quelconque vérifiant $1 \leq m \leq n$.

4. Donner un ensemble fondamental Ω pour décrire cette expérience et donner $X(\Omega)$.

5. Déterminer la loi de X.

6. **(Bonus 2pt)** Déterminer la loi de X si le tirage est fait avec remise.

Exercice IV *(3 points)*

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{4}{k}\mathbb{P}\left(X = k-1\right)$$

1. Calculer $\mathbb{P}\left(X = k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, en fonction de $\mathbb{P}\left(X = 0\right)$.

2. Déterminer la loi de X. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.