SY01 / A21 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Rendre une copie par Partie (même si elle est blanche)

Rappels séries numériques

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ pour } x \in]-1,1[. \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Partie I *(changer de copie)*

Exercice I *(8 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et B deux évènements.

1. Montrer que si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les paires d'évènements (a) A et $\overline{B}$, (b) $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2. On considère A et B indépendants et tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$. Déterminer les lois des variables aléatoires $X = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ et $Y = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. S'il s'agit des lois connues, les identifier.

Considérons maintenant A, B, C, trois évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 1/2,\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 5/12,$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/3,\ \mathbb{P}(A \cap C) = 1/4,$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4.$

3. Déterminer la loi de $Z = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.

4. Déterminer la fonction de répartition de la v.a. Z.

Solution Exercice I:

1. A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(a) On peut considérer la réunion disjointe $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$, alors nous avons

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

(b) Nous avons que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(A \cup B\right) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)\left(1 - \mathbb{P}(A)\right) = \left(1 - \mathbb{P}(A)\right)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B}).\end{aligned}$$

2. Pour $X = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ nous avons $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Il ne s'agit pas d'une loi connue. Nous devons calculer la loi au cas par cas.

En appliquant le résultat démontré en 1(a), nous avons que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 1) = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) = (1-p)p.$$

De manière analogue

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 0) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = p(1-p).$$

Et en appliquant le résultat démontré en 1(b),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}\left((\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 0) \cup (\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 1)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}(A \cap B) = (1-p)^2 + p^2 = 1 - 2p(1-p).\end{aligned}$$

Cett dernière valeur aurait pû aussi être calculé en passant par l'évènement complémentaire, soit $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = -1) - \mathbb{P}(X = 1)$.

Pour $Y = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ nous avons $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, donc il s'agit de la loi de Bernoulli, il reste à détermier la valeur du paramètre. Nous avons

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 1) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = p^2,$$

donc $Y \sim$ Bernoulli(p^2).

3. Nous avons $Z = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$, donc $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Nous vérifions rapidement que les évènements ne sont pas indépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(B \cap C) \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. De plus, les 3 n'ont pas la même probabilité, en conséquence, Z ne suit pas la loi Binomiale$(3, p)$, et il faut calculer sa loi au cas par cas.

Par les propriétés de la probabilité du compémentaire, et le principe de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 0, \mathbb{1}_C = 0) = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(AC) + \mathbb{P}(ABC)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} - 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 1, \mathbb{1}_C = 1) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 1, \mathbb{1}_C = 0) + \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 0, \mathbb{1}_C = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 1, \mathbb{1}_C = 1) \\ &= \mathbb{P}\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \\ &= \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(ABC) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(ABC) + \mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(ABC) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) - \mathbb{P}(Z = 2) - \mathbb{P}(Z = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

4. La fonction de répartition de Z est la fonction $F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie comme suit

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1/3 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 7/12 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 9/12 & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{if } 3 \leq x \end{cases}.$$

Exercice II *(3 points)*

On lance une pièce de monnaie indéfiniment et de manière indépendante jusqu'à obtenir pile pour la première fois. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir pile est égale à p ($p \in]0,1[$). Soit X le rang du tirage où l'on obtient le dernier face qui précède pile.

1. Identifier la loi de $X+1$, puis déterminer la loi de X.

2. Calculer la fonction génératrice de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et Var(X).

Solution Exercice II:

1. $X+1$ est le rang où l'on obtient pile pour la première fois pile dans une suite d'expériences indépendantes et chacune de loi Bernoulli(p), alors $X+1 \sim \mathcal{G}(p)$. Alors nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X+1=k+1) = (1-p)^{k-1+1}p = (1-p)^k p.$$

2. La fonction génératrice est une fontcion $g_X : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie comme suit pour tout $u \in [0,1]$

$$g_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} u^k (1-p)^k p = \frac{p}{1-(1-p)u}.$$

3. Par les propriétés de l'espérance mathématique, et de la loi géométrique, nous avons que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X+1-1] = \mathbb{E}[X+1] - 1 = \frac{1}{p} - 1.$$

Pour la variance nous procédons de manière équivalente,

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X+1) = \frac{1-p}{p^2}$$

On peut aussi utiliser les formules $\mathbb{E}[X] = g'_X(1)$ et Var$(X) = g''_X(1) - g'_x(1) + (g'_X(1)))^2$, ou calculer l'espérance et la variance directement à partir de la loi.

(Tourner la page et changer de copie)

Partie II *(changer de copie)*

Exercice III *(6 points + 2 points bonus)*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire successivement deux boules au hasard, sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$.

2. En déduire la loi de la variable aléatoire X. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.

3. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X-1}\right]$.

On considère maintenant le même problème, mais on tire successivement m boules, avec m un entier quelconque vérifiant $1 \leq m \leq n$.

4. Donner un ensemble fondamental Ω pour décrire cette expérience et donner $X(\Omega)$.

5. Déterminer la loi de X.

6. **(Bonus 2pt)** Déterminer la loi de X si le tirage est fait avec remise.

Solution Exercice III:

1. Il s'agit d'un tirage de deux boules numérotées de manière consécutive et sans remise, que l'on peut modéliser par l'espace fondamental $\Omega = \{(n_1, n_2) \in \{1, \cdots, n\}^2, n_1 \neq n_2\}$, et la probabilité uniforme dans cet espace. Ainsi $|\Omega| = A_n^2$. Nous devons compter le nombre de cas favorables pour calculer la probabilité de $\{X \leq k\}$. Nous avons, pour $k \in \{2, \cdots, n\}$
$$\{X \leq k\} = \Big\{(n_1, n_2) \in \{1, \cdots, n\}^2, n_1 < n_2 \leq k, \text{ ou } n_2 < n_1 \leq k\Big\}$$
Alors $|\{X \leq k\}| = 2\binom{k}{2} = k(k-1) = A_k^2$, donc
$$\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

2. Nous avons, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

3. $$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X-1}\right] = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}\frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

4. De manière analogue, pour $m \in \{1, \dots, n\}$ nous pouvons prendre $\Omega = \{(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \{1, \dots, n\}^m, n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_m\}$. Nous avons donc $|\Omega| = A_n^m$ et $X(\Omega) = \{m, m+1, \dots, n\}$.

5. Cet espace est muni de la probabilité uniforme, donc on doit compter le nombre de cas favorables. Nous avons que

$$\{X = k\} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \{1, \ldots, n\}^m, n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_m, \text{ et } \max(n_1, n_2, \ldots, n_m) = k\}.$$

Alors

$$|\{X = k\}| = 1 \times \binom{k-1}{m-1} \times m!, \text{ où}$$

- le premier 1 répresente le choix du plus grand numéro tiré, qui est fixé ici égal à k,
- $\times\binom{k-1}{m-1}$ réprésente le nombre de choix des autres $m-1$ numéros tirés dans l'ensemble $\{1, \ldots, k-1\}$,
- $m!$ réprésente le nombre de placements possibles des m numéros dans le tirage.

En conclusion, pour tout $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$, nous avons

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{m! \times \binom{k-1}{m-1}}{A_n^m} = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

Il ne s'agit pas d'une loi connue.

6. Si nous considérons maintenant le même problème avec remise, nous avons $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^m$, ainsi $|\Omega| = n^m$, et $|\{X \leq k\}| = k^m$, pour tout $k \in X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m \Longrightarrow \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m.$$

Exercice IV *(3 points)*

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{4}{k}\mathbb{P}(X = k-1)$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, en fonction de $\mathbb{P}(X = 0)$.
2. Déterminer la loi de X. S'il s'agit d'une loi connue, l'identifier.

Solution Exercice IV:

1. En appliquant successivement la rélation de récurrence donnée, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{4}{1}\mathbb{P}(X = 0) \\
\mathbb{P}(X = 2) &= \frac{4}{2}\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4^2}{2 \times 1}\mathbb{P}(X = 0) \\
&\ldots \\
\mathbb{P}(X = k) &= \frac{4}{k}\mathbb{P}(X = k-1) = \ldots = \frac{4^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0)
\end{aligned}$$

Cette formule peut-être demontrée rigoureusement par récurrence, mais ici nous acceptons le raisonnement précédent.

2. Il reste à calculer la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$ pour que ce soit une loi de probabilité.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=1 \iff \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}\mathbb{P}\left(X=0\right)=1 \iff \mathbb{P}\left(X=0\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}=1\\ \iff \mathbb{P}\left(X=0\right)\exp(4)=1 \iff \mathbb{P}\left(X=0\right)=\exp(-4)\end{aligned}$$

Alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{e^{-4}4^k}{k!}$, donc $X\sim\mathcal{P}(4)$.