SY01 / A22 - FINAL

(Durée : 2h - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(5 + 2 points bonus)*

Soit X une variable aléatoire réelle de loi de Weibull des paramètres $k, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, définie par la fonction de densité f suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha k \left(\alpha x\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\alpha x\right)^k\right), & x \geq 0. \end{cases}$$

1 **1.** Déterminer la fonction de répartition de X.

1 **2.** Montrer que si u est une réalisation de la loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors $\frac{1}{\alpha}\left(-\ln(u)\right)^{1/k}$ est une réalisation de la loi de X.

3. Soit U de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et soit $Y = (\alpha X)^k$; Y et U sont indépendantes.

1 (a) Montrer que Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, en précisant la valeur de λ.

2 (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = Y + U$.

2 **4.** **(2pt bonus)** Pour $k = 2, \alpha = 1$, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

Exercice II *(4 points)*

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$.
On définit $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Formule utile : $\lim_n (1 + \frac{a}{n})^n = \exp(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1 **1.** Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n.

1 **2.** Étudier la convergence en loi des suites (M_n) et (Y_n) (bien préciser les v.a. limites).

1,5 **3.** Montrer que la suite (M_n) converge aussi en probabilité.

0,5 **4.** Peut-on appliquer la L.G.N. vue en cours à la suite (M_n) ? Justifier.

Exercice III *(7 points)*

Soient $\lambda > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ admettant la densité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda^3 x \exp(-\lambda y) \mathbb{1}_D(x, y).$$

<u>**Formule utile :**</u> $\int_0^{+\infty} u^n \exp(-\lambda u) \mathrm{d}u = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$.

1 **1.** Montrer que la fonction $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

1,5 **2.** Calculer les densités marginales de X et de Y ; sont-elles indépendantes ?

2 **3.** Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

2,5 **4.** Soit $(U, V) = (\frac{X}{Y}, Y)$. Calculer la densité du couple aléatoire (U, V). Montrer que U et V sont indépendantes et préciser leurs loi marginales.

Exercice IV *(4 points)*

Un restaurant peut servir un maximum de M repas en une soirée. Les clients doivent réserver en avance, et pour chaque réservation effectuée, avec probabilité q le client ne vient pas.

1 **1.** On suppose que n réservations sont effectuées de manière indépendante les unes des autres. On note S_n le nombre de clients qui se présentent parmi les n qui ont réservé. Quelle est la loi de S_n ? Quelle est sa moyenne ? Quelle est sa variance ?

1 **2.** Donner, pour n grand et $x > 0$, une approximation de $\mathbb{P}(|S_n| \leq x)$ en fonction de n, q, x et Φ (où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

On suppose désormais $q = 0.2$ et $M = 84$.

1 **3.** Le restaurateur accepte 100 réservations. Quelle est la probabilité que plus de 72 clients ayant réservé se présentent ?

1 **4.** Combien le restaurateur peut-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.84 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

<u>**Valeurs numériques :**</u> $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(2) \approx 0.98$, $(41)^2 = 1681$.