SY01 / A22 - FINAL

(Durée : 2h - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(5 + 2 points bonus)*

Soit X une variable aléatoire réelle de loi de Weibull des paramètres $k, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, définie par la fonction de densité f suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha k \left(\alpha x\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\alpha x\right)^k\right), & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.

2. Montrer que si u est une réalisation de la loi $\mathcal{U}([0,1])$, alors $\dfrac{1}{\alpha}\left(-\ln(u)\right)^{1/k}$ est une réalisation de la loi de X.

3. Soit U de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et soit $Y = (\alpha X)^k$; Y et U sont indépendantes.

(a) Montrer que Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, en précisant la valeur de λ.

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = Y + U$.

4. **(2pt bonus)** Pour $k = 2, \alpha = 1$, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

Solution Exercice I :

1. La f.d.r. de X est nulle pour $x < 0$. Pour $x \geq 0$ nous avons

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \alpha k \left(\alpha t\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\alpha t\right)^k\right) dt = -\exp\left(-\left(\alpha t\right)^k\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\left(\alpha x\right)^k\right).$$

2. Nous allons calculer la réciproque de la f.d.r. de X afin d'appliquer le théorème de l'inverse. Soit $u \in]0,1[$,

$$u = 1 - \exp\left(-\left(\alpha x\right)^k\right) \iff -\left(\alpha x\right)^k = \ln(1-u) \iff x = \frac{1}{\alpha}\left(-\ln(1-u)\right)^{\frac{1}{k}},$$

Alors $F_X^{-1}(u) = \frac{1}{\alpha}\left(-\ln(1-u)\right)^{\frac{1}{k}}$. Enfin, si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $1-U$ est aussi de loi $\mathcal{U}([0,1])$, ce qui permet de conclure.

3. (a) Nous allons calculer la f.d.r. de Y. Pour tout $\alpha, k > 0$ et $y \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\left(\alpha X\right)^k \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{k}}\right) = 1 - \exp\left(-\left(\alpha \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{k}}\right)^k\right) = 1 - \exp(-y).$$

On obtient la f.d.r. de la loi $\mathcal{E}(1)$.

(b) Comme Y et U sont indépendantes, la densité de Z est le produit de convolution de $f_Y(x) = \exp(-x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ et de $f_U(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, alors

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(z-x) f_Y(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(z-x) \exp(-x) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[z-1,z]}(x) \exp(-x) dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0, \\ \int_0^z \exp(-x)dx = 1 - \exp(-z) & \text{si } 0 \leq z < 1, \\ \int_{z-1}^z \exp(-x)dx = \exp(-z)(e-1) & \text{si } 1 \leq z. \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Pour $k = 2, \alpha = 1$ nous avons que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} 2x^2 \exp\left(-x^2\right) dx = (-xe^{-x^2})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Nous avons d'abord fait une I.P.P., ensuite le changement de variable $y = x/\sqrt{2}$ et dans la dernière égalité nous avons utilisé les propriétés de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$, qui est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

De manière similaire nous obtenons que

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} 2x^3 e^{-x^2} dx = (-x^2 e^{-x^2})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2} dx = 1.$$

Donc

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice II *(4 points)*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$.
On définit $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Formule utile : $\lim\limits_n (1 + \frac{a}{n})^n = \exp(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n.
2. Étudier la convergence en loi des suites (M_n) et (Y_n) (bien préciser les v.a. limites).
3. Montrer que la suite (M_n) converge aussi en probabilité.
4. Peut-on appliquer la L.G.N. vue en cours à la suite (M_n) ? Justifier.

Solution Exercice II :

1. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x, \ldots, U_n \leq x) = (\mathbb{P}(U_1 \leq x))^n$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ x^n & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Ensuite, pour $n \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq y) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{y}{n}\right) = 1 - F_{M_n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq y < n, \\ 1 & \text{si } n \leq y. \end{cases}$$

2. Pour tout x fixé, nous avons

$$\lim_n F_{M_n}(x) = G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Alors la suite (M_n) converge en loi vers la v.a. constante égal à 1, dont G est la f.d.r.

On va étudier maintenant, pour tout y fixé, la limite de $F_{Y_n}(y)$. Il est clair que si $y < 0$, alors $\lim_n F_{Y_n}(y) = 0$. D'un autre côté, pour $y \geq 0$ et pour n assez grand, on a $y < n$ et donc

$$\lim_n F_{Y_n}(y) = \lim_n 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = 1 - \exp(-y).$$

Cela montre que la suite (Y_n) converge en loi vers une v.a. $\mathcal{E}(1)$.

3. Nous allons étudier la limite en probabilité de la suite (M_n). Soit $\epsilon > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| > \epsilon) = \mathbb{P}(\{M_n < 1 - \epsilon\} \cup \{M_n > 1 + \epsilon\}) = \mathbb{P}(M_n < 1 - \epsilon) = (1 - \epsilon)^n, \text{si } \epsilon < 1,$$

et c'est 0 sinon. Dans les deux cas la limite quand $n \to \infty$ est égale à 0, ce qui montre la convergence en probabilité vers la v.a. constante égale à 1.

4. Il suffit de remarquer que les v.a. M_n ne sont pas indépendantes (elles n'ont pas non plus la même loi), car $M_{n+1} = \max(M_n, U_{n+1})$, donc nous ne pouvons pas appliquer la L.G.N. vue en cours.

Exercice III *(7 points)*

Soient $\lambda > 0$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ admettant la densité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda^3 x \exp(-\lambda y) \mathbb{1}_D(x, y).$$

<u>**Formule utile :**</u> $\int_0^{+\infty} u^n \exp(-\lambda u) \mathrm{d}u = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$.

1. Montrer que la fonction $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les densités marginales de X et de Y ; sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

4. Soit $(U,V) = (\frac{X}{Y}, Y)$. Calculer la densité du couple aléatoire (U,V). Montrer que U et V sont indépendantes et préciser leurs loi marginales.

Solution Exercice III :

1. La fonction $f_{X,Y}$ est positive et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} \lambda^3 x\exp(-\lambda y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{+\infty}\exp(-\lambda y)y^2\mathrm{d}y = 1.$$

2. On calcule la densité marginale de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \lambda^3 x\int_x^{+\infty}\exp(-\lambda y)\mathrm{d}y = \lambda^2 x\exp(-\lambda x), \quad \text{si } x > 0,$$

et $f_X(x) = 0$ si $x \le 0$.

De même, la densité marginale de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \lambda^3\exp(-\lambda y)\int_0^{y} x\mathrm{d}x = \frac{\lambda^3}{2}\exp(-\lambda y)y^2, \quad \text{si } y > 0,$$

et $f_Y(y) = 0$ si $y \le 0$.

Nous avons $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, ce qui implique que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Pour calculer l'espérance et la variance conditionnelle il nous faut la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$, soit

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda^3 x\exp(-\lambda y)}{\lambda^2 x\exp(-\lambda x)}\mathbb{1}_D(x,y) = \lambda\exp(-\lambda(y-x))\mathbb{1}_{\{0<x<y\}}.$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X=x] &= \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = \int_x^{+\infty}\lambda y\exp(-\lambda(y-x))\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\lambda(x+u)\exp(-\lambda u)\mathrm{d}u \\ &= x\int_0^{+\infty}\lambda\exp(-\lambda u)\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty}\lambda u\exp(-\lambda u)\mathrm{d}u = x + \frac{1}{\lambda},\end{aligned}$$

où nous avons fait le changement de variable $u = y - x$.

On obtient donc $\mathbb{E}[Y|X] = X + \dfrac{1}{\lambda}$.

4. Nous avons $(U,V) = g(X,Y) = (\frac{X}{Y}, Y)$ où $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ avec $g_1(x,y) = x/y$ et $g_2(x,y) = y$. La transformation réciproque de g est $g^{-1}(u,v) = (uv, v)$, définie sur $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1,\ 0 < v < +\infty\}$.

   La valeur absolue du Jacobien de g^{-1} est calculée comme suit

$$\left|DJ_{g^{-1}}\right| = \left|\text{dét}\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = |v| = v.$$

   Par le théorème de transformation d'un vecteur aléatoire (théorème de transfert), la densité du couple (U,V) est

$$\begin{aligned} h_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y} \circ g^{-1}(u,v)|DJ_{g^{-1}}|\mathbb{1}_{\Delta}(u,v) = \lambda^3 uv^2 e^{-\lambda v}\mathbb{1}_{]0,1[}(u)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v) \\ &= 2u\mathbb{1}_{]0,1[}(u)\frac{\lambda^3}{2}v^2\exp(-\lambda v)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v). \end{aligned}$$

   Cette densité est le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v, donc les v.a. U et V sont indépendantes. La densité de U est $f_U(u) = 2u\mathbb{1}_{]0,1[}(u)$, et comme $V = Y$, la densité de V est f_Y.

Exercice IV *(4 points)*

Un restaurant peut servir un maximum de M repas en une soirée. Les clients doivent réserver en avance, et pour chaque réservation effectuée, avec probabilité q le client ne vient pas.

1. On suppose que n réservations sont effectuées de manière indépendante les unes des autres. On note S_n le nombre de clients qui se présentent parmi les n qui ont réservé. Quelle est la loi de S_n ? Quelle est sa moyenne ? Quelle est sa variance ?

2. Donner, pour n grand et $x > 0$, une approximation de $\mathbb{P}(|S_n| \leq x)$ en fonction de n, q, x et Φ (où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

On suppose désormais $q = 0.2$ et $M = 84$.

3. Le restaurateur accepte 100 réservations. Quelle est la probabilité que plus de 72 clients ayant réservé se présentent ?

4. Combien le restaurateur peut-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.84 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Valeurs numériques : $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(2) \approx 0.98$, $(41)^2 = 1681$.

Solution Exercice IV :

1. Soit $p = 1 - q$ la probabilité qu'un client ayant réservé, se présente. Alors $S_n \sim \text{Bin}(n,p)$ et $\mathbb{E}[S_n] = np$ et $\text{Var}(S_n) = npq$.

2. Les hypothèses du TCL sont vérifiées, et S_n est à valeurs positives, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| \leq x) &= \mathbb{P}(-x \leq S_n \leq x) = \mathbb{P}(S_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \end{aligned}$$

3. Nous avons maintenant $p = 0.8$, alors $\mathbb{E}[S_{100}] = 100 \times 0.8 = 80$ et $\mathrm{Var}(S_{100}) = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16$, donc $\sqrt{\mathrm{Var}(S_{100})} = 4$. Alors la probabilité que plus de 72 clients se présentent peut être calculée comme suit

$$\mathbb{P}\left(S_{100} > 72\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{100} - 80}{4} > \frac{72 - 80}{4}\right) \approx 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.98.$$

4. Il s'agit maintenant de trouver le plus grand n tel que $\mathbb{P}(S_n \leq 84) \geq 0.84$. On a, d'une part

$$\mathbb{P}\left(S_n \leq 84\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \leq \frac{84 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{84 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right),$$

et d'autre part $\Phi(1) = 0.84$. Comme Φ est une fonction croissante, Φ^{-1} aussi, on doit donc avoir

$$\frac{84 - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \geq 1 \iff 84 - 0.8n \geq 0.4\sqrt{n},$$

ce qui conduit, en posant $x = \sqrt{n}$, à l'inéquation $2x^2 + x - 210 \leq 0$, soit $(2x+21)(x-10) \leq 0$. L'ensemble de solutions de cette inégalité est l'intervalle $[-21/2, 10]$, alors le plus grand $n \in \mathbb{N}$ qui satisfait la condtion donnée est $\sqrt{n} = 10$, soit $n = 100$.

Remarque. Le polynôme de second degré $2x^2 + x - 210$ peut aussi être factorisé par la méthode du discriminant (ici $\Delta = 1681 = 41^2$), ce qui conduit au même résultat.