SY01 / A22 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(7 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et B deux évènements.

1. Montrer que

(a) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq P(A) - P(\overline{B})$

(b) Si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B \mid \mathrm{A} \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B \mid \mathrm{A})$.

2. On considère A et B indépendants et tels que $\mathbb{P}(A) = p$, et $\mathbb{P}(B) = q$, avec $p, q \in]0, 1[$. On définit les variables aléatoires $X = (\mathbb{1}_A)^2 - (\mathbb{1}_B)^2$ et $Y = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

(a) Déterminer les lois de X et de Y.

(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(c) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(d) X et Y sont-elles indépendantes pour $p = q = 1/2$?

Solution Exercice I:

1. (a) Nous avons que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, comme cette réunion disjointe nous avons que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}\left(\overline{B}\right),$$

car $A \cap \overline{B} \subset \overline{B} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \leq \mathbb{P}(\overline{B})$.

(b) Comme $A \subset A \cup B$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) > \mathbb{P}(A) > 0$, et les probabilités oonditionnelles données sont bien définies. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid \mathrm{A} \cup B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap B \mid \mathrm{A})$$

2. (a) On peut remarquer que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, donc Y est une v.a. de loi Bernoulli. De plus $(\mathbb{1}_A)^2 = \mathbb{1}_A$, et $(\mathbb{1}_B)^2 = \mathbb{1}_B$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = -1) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 1) = \mathbb{P}\left(\overline{A}B\right) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = q(1-p), \\
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 0) = \mathbb{P}\left(A\overline{B}\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = p(1-q), \\
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - p(1-q) - q(1-p).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0, \mathbb{1}_B = 1) + \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 0) = q(1-p) + p(1-q), \\
&\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p(1-q) - q(1-p).
\end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ q(1-p), & -1 \leq x < 0 \\ 1 - p(1-q) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}.$$

(c) Nous avons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= -q(1-p) + p(1-q) = p - q, \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p(1-q) + q(1-p) + (p-q)^2 \\ &= p(1-p) + q(1-q). \end{aligned}$$

(d) Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes pour $p = q = 1/2$. Nous avons, par exemple $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 1/4$.

Exercice II *(6 points)*

On considère un dé bien équilibré à 6 faces, avec 2 faces rouges et 4 bleues. À chaque lancer du dé on note la couleur de la face sortie, B signifiant bleue et R rouge. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus. On relance le dé de manière indépendante, et on s'arrête dès que, pour la première fois, les deux couleurs du dé sont sorties. On s'intéresse à la variable aléatoire X prenant pour valeur la longueur de la première série de lettres identiques. Par exemple : $X = 3$ pour $RRRB$ ou $BBBR$.

1. Donner un ensemble fondamental Ω pour décrire cette expérience et donner $X(\Omega)$.

2. Déterminer la loi de X.

3. Calculer la fonction génératrice de X.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution Exercice II:

1. Nous pouvons considérer $\Omega = \{BR, RB, BBR, RRB, \ldots\} = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = R, \omega_k = B$ ou $\omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = B, \omega_k = R, k \in \mathbb{N}\}$, et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. À chaque lancer, la probabilité d'avoir une face rouge est de $p = 1/3$ et d'avoir une face bleue est de $1 - p = 2/3$. Nous remarquerons que X prend la valeur de la longueur de la série des lettres identiques qui précède l'apparition de l'autre lettre, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X = k) \\ &= \mathbb{P}\left(\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_1 = \cdots = \omega_k = R, \omega_{k+1} = B \text{ ou } \omega_1 = \cdots = \omega_k = B, \omega_{k+1} = R\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{\omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = R, \omega_k = B\right) + \mathbb{P}\left(\omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = B, \omega_k = R\}\right) \\ &= p^k(1-p) + (1-p)^k p = \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Pour $u \in]-1,1[$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u^X\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} u^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k \left(p^k(1-p) + (1-p)^k p\right) \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty}(up)^k + p\sum_{k=1}^{\infty}(u(1-p))^k = \frac{(1-p)pu}{1-pu} + \frac{(1-p)pu}{1-(1-p)u} \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{u}{1-\frac{1}{3}u} + \frac{u}{1-\frac{2}{3}u}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{u}{3-u} + \frac{u}{3-2u}\right)
\end{aligned}$$

4. Nous pouvons calculer directement l'espérance, soit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(p^k(1-p) + (1-p)^k p\right) \\
&= (1-p)p\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)p\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{1-(1-p))^2}\right) \\
&= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = 2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la dérivation terme à terme de la série de la fonction $\frac{1}{1-x}$, ce qui implique que $\forall x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On peut aussi calculer l'espérance en utilisant la formule $\mathbb{E}[X] = g'(1)$. Nous avons que

$$g'(u) = p(1-p)\left(\frac{1}{(1-pu)^2} + \frac{1}{(1-(1-p)u)^2}\right),$$

alors $g'(1) = 2 + 1/2$.

Exercice III *(4 points + 2 points bonus)*

Soient X et Y deux v.a. discrètes indépendantes à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, d\}$, des lois $(p_1, \ldots, p_d)$, et $(q_1, \ldots, q_d)$ respectivement. Soit B une v.a. Bernoulli de paramètre p, indépendante de X et de Y. Nous allons considérer la v.a. $Z := BX + (1-B)Y$ à valeurs dans E.

1. Déterminer la loi de Z.

Application. Un site d'e-commerce propose d articles numérotés de 1 à d, ordonnés du moins cher au plus cher. Chaque client qui se connecte au site achète un seul article. Une étude montre qu'il y a deux types de clients dans la population selon leurs habitudes d'achat :

- les clients de type I achètent l'article i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \ldots, d$,

- les clients de type II achètent l'article i avec probabilité q_i, pour $i = 1, \ldots, d$.

Il y a une proportion de 20% de clients de type I dans la population.

2. Quelle est la probabilité qu'un client choisit au hasard dans la population achète l'un des 2 articles les plus chers ?

3. On choisit au hasard un client ayant acheté l'article numéro 1, quelle est la probabilité qu'il soit de type I ?

Solution Exercice III:

1. Z est à valeurs dans E, alors pour $k \in E$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(Z = k, B = 1) + \mathbb{P}(Z = k, B = 0) \\
&= \mathbb{P}(Z = k \mid B = 1)\,\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(Z = k \mid B = 0)\,\mathbb{P}(B = 0) \\
&= \mathbb{P}(X = k)\,p + \mathbb{P}(Y = k)\,(1 - p) \\
&= p_k p + q_k(1 - p).
\end{aligned}$$

2. Ici $B \sim$ Bernoulli$(1/5)$, $X \sim (p_1, \ldots, p_d)$ et $Y \sim (q_1, \ldots, q_d)$. L'article acheté par un client choisit au hasard dans la population suit la loi $Z := BX + (1 - B)Y$, alors

$$\mathbb{P}(Z \geq d - 1) = \mathbb{P}(Z = d - 1) + \mathbb{P}(Z = d) = \frac{1}{5}p_{d-1} + \frac{4}{5}q_{d-1} + \frac{1}{5}p_d + \frac{4}{5}q_d$$

3. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B = 1 \mid Z = 1) &= \frac{\mathbb{P}(B = 1, Z = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)} = \frac{\mathbb{P}(Z = 1 \mid B = 1)\mathbb{P}(B = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z = 1 \mid B = 1)\mathbb{P}(B = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1 \mid B = 1)\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(Z = 1 \mid B = 0)\mathbb{P}(B = 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(B = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(B = 1) + \mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(B = 0)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}p_1}{\frac{1}{5}p_1 + \frac{4}{5}q_1} = \frac{p_1}{p_1 + 4q_1}
\end{aligned}$$

Exercice IV *(3 points)*

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 livres de chimie, tous distincts. De combien de façons différentes peut-on effectuer ce rangement :

1. Si les livres doivent être groupés par matières.

2. Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Solution Exercice IV:

1. Il y a $3!$ façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a $4!$ façons de ranger les livres de mathématiques, $6!$ façons de ranger les livres de physique, et $3!$ façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : $3!4!6!3!$

2. Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le bloc des livres de mathématiques. Ce choix fait, il y a $4!$ façons d'ordonner les livres de mathématiques, et $9!$ façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout $10 \times 4!9!$ rangements différents.