SY01 / A23 - FINAL

(Durée : 2h - fiche recto-verso A4 autorisée)

Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha > 0,\ \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{(n-1)!}{\alpha^n}.$

5 Exercice I *(5 points)*

Pour fonctionner, un système utilise une pièce que l'on peut changer une seule fois. Le changement est instantané et sans arrêt du système. On dispose de la pièce originale et d'une pièce de rechange, qui ont respectivement des durées de vie aléatoires X_1 et X_2, de même loi et indépendantes. La densité f de la loi de la durée de vie des pièces dépend d'une constante $c > 0$, et est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cxe^{-x/2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

1 **1.** Déterminer la valeur de c pour que f soit bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2 **2.** Déterminer la loi de la durée de vie du système.

1 **3.** Calculer l'espérance et la variance de la durée de vie du système.

1 **4.** Calculer la fonction de fiabilité du système $R(x)$ qui correspond à la probabilité que le système soit encore en fonctionnement au bout de x unités de temps, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

6 Exercice II *(6 points)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ admettant la densité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xe^{-(x+y)} \mathbb{1}_{]0,y[}(x) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

1 **1.** Montrer que la fonction $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

1 **2.** Calculer les densités marginales de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?

1,5 **3.** Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

2,5 **4.** On pose $U = \frac{X}{X+Y}$ et $S = X + Y$.

(2) (a) Déterminer la loi du couple (U, S).

(0,5) (b) U et S sont-elles indépendantes ?

5 **Exercice III** *(5 points)*

Soit $D(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ le disque de centre $(0,0)$ et rayon r.

Soit (X,Y) un couple aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de loi uniforme dans le disque unitaire $D = D(0,1)$.

Soit $Z = 2\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$, la variable aléatoire réelle correspondant à la longueur de la corde du cercle unitaire, dont le milieu est le point (X,Y).

1 **1.** Donner la densité du couple (X,Y).

1 **2.** Calculer, pour tout $r \in [0,1]$: $\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \leq r^2\right)$.

1,5 **3.** Déterminer la densité de Z. (*Suggestion :* calculer d'abord sa fonction de répartition).

0,5 **4.** Calculer la probabilité que Z soit supérieure à la longueur de l'un des côtés du triangle équilatéral inscrit dans D.

1 **5.** Calculer la fonction génératrice des moments de Z.

6 **Exercice IV** *(6 points)*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli, de même paramètre p.

0,5 **1.** Soit $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}\text{ar}(M_n)$.

1 **2.** Donner, pour n grand, une approximation de $\mathbb{P}(M_n \geq p)$.

0,5 **3.** Montrer la convergence presque sûre de la suite M_n quand $n \to \infty$ en précisant la limite.

On définit maintenant la suite $Y_n = X_n X_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 **4.** Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle i.i.d. ?

2 **5.** Soit $T_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}\text{ar}(T_n)$.

1 **6.** Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - p^2| \geq \epsilon) = 0$. Que peut-on en déduire sur la convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?