SY01 / A23 - FINAL

(Durée : 2h - fiche recto-verso A4 autorisée)

Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha > 0,\ \Gamma(n) = \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\alpha t} dt = \dfrac{(n-1)!}{\alpha^n}$.

Exercice I *(5 points)*

Pour fonctionner, un système utilise une pièce que l'on peut changer une seule fois. Le changement est instantané et sans arrêt du système. On dispose de la pièce originale et d'une pièce de rechange, qui ont respectivement des durées de vie aléatoires X_1 et X_2, de même loi et indépendantes. La densité f de la loi de la durée de vie des pièces dépend d'une constante $c > 0$, et est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cxe^{-x/2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de c pour que f soit bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la loi de la durée de vie du système.
3. Calculer l'espérance et la variance de la durée de vie du système.
4. Calculer la fonction de fiabilité du système $R(x)$ qui correspond à la probabilité que le système soit encore en fonctionnement au bout de x unités de temps, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Solution Exercice I :

1. Nous avons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $c > 0$), et on doit avoir également $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Par intégration par parties on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} cxe^{-x/2}\mathrm{d}x = c\left[-2xe^{-x/2}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\mathrm{d}x\right] = c\left[-4e^{-x/2}\Big|_0^{+\infty}\right] = 4c.$$

Alors $c = 1/4$. Il s'agit de la loi Gamma de paramètres $\alpha = 2$ et $\lambda = 1/2$.

2. Soit $X = X_1 + X_2$ la v.a.r. correspondant à la durée de vie du système, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, la fonction de densité de X est donnée par le produit de convolution suivant, pour $x \geq 0$,

$$f_X(x) = (f * f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}(x-y)e^{-(x-y)/2}\mathbb{1}_{\{x-y\geq 0\}}\frac{1}{4}ye^{-y/2}\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^x (x-y)ye^{-x/2}\mathrm{d}y = \frac{1}{16}e^{-x/2}\left[\frac{xy^2}{2}\Big|_0^x - \frac{y^3}{3}\Big|_0^x\right] = \frac{x^3}{96}e^{-x/2}.$$

Pour $x < 0$ nous avons $f_X(x) = 0$.

Nous pouvons remarquer qu'il s'agit de la loi Gamma de paramètres $\alpha = 4$ et $\lambda = 1/2$. Ce résultat n'est pas surprenant, car nous avons demontré en TD que la somme de n v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ suit la loi Gamma de paramètres $\alpha = n$ et λ (Exo 20 du Ch. 3). Ainsi, X_1 et X_2 peuvent s'écrire chacune comme la somme de deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$, et donc X est la somme de quatre v.a. i.i.d. de cette même loi.

3. En utilisant la formule du rappel, avec $\alpha = 1/2$, et $n = 5$ et $n = 6$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{96}\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{96}\frac{4!}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 8, \\
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{96}\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{96}\frac{5!}{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 80, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 = 80 - 8^2 = 16.
\end{aligned}$$

On pouvait aussi calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$, et comme X_1 et X_2 sont i.i.d., nous avons que $\mathbb{E}[X] = 2\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$.

4. D'après la définition, la fiabilité est $R(x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x)$, où $F_X(x)$ est la f.d.r. de X. En faisant 3 IPP de suite, nous obtenons que

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{96} t^3 e^{-t/2} dt = \frac{1}{96}\left[-2x^3 e^{-x/2} - 12x^2 e^{-x/2} - 48x e^{-x/2} - 96 e^{-x/2} + 96\right].$$

Exercice II *(6 points)*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ admettant la densité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = 4x e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{]0,y[}(x) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

1. Montrer que la fonction $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les densités marginales de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.

4. On pose $U = \dfrac{X}{X+Y}$ et $S = X + Y$.

(a) Déterminer la loi du couple (U, S).

(b) U et S sont-elles indépendantes ?

Solution Exercice II :

1. La fonction $f_{X,Y}$ est positive et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 4xe^{-(x+y)}\mathbb{1}_{]0,y[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} 4e^{-y}\int_0^y xe^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{+\infty} 4e^{-y}\left(-ye^{-y} - e^{-y} + 1\right)\mathrm{d}y = 4\left(-\int_0^{+\infty} ye^{-2y}\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} e^{-2y}\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y\right)$$
$$= -4\left(\frac{(2-1)!}{2^2} - \frac{1}{2} + 1\right) = 1.$$

Pour le passage à la dernière ligne nous avons utilisé la formule du rappel avec, respectivement, $n = 2, \alpha = 1$ / $n = 1, \alpha = 2$ / $n = 1, \alpha = 1$.

2. Non, le domaine n'est pas un rectangle donc elles ne peuvent pas être indépendantes (faire une figure !). On calcule la densité marginale de X, pour $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = 4xe^{-x}\int_x^{\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = 4xe^{-2x}.$$

et $f_X(x) = 0$ si $x \leq 0$. De même, la densité marginale de Y est, pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = 4e^{-y}\int_0^y xe^{-x}\mathrm{d}x = 4(e^{-y} - e^{-2y} - ye^{-2y}).$$

et $f_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$.

Nous pouvons vérifier que $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, ce qui confirme que X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Nous devons calculer d'abord $\mathbb{E}[Y|X = x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition, pour $x > 0$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{4xe^{-(x+y)}}{4xe^{-2x}}\mathbb{1}_{]0,y[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) = e^{x-y}\mathbb{1}_{]0,y[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

Alors

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{x-y}\mathbb{1}_{]0,y[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\mathrm{d}y = e^x\int_x^{+\infty} ye^{-y}\mathrm{d}y$$
$$= e^x\left[xe^{-x} + \int_x^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y\right] = e^x\left[xe^{-x} + e^{-x}\right] = x + 1.$$

Alors $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

4. (a) Nous avons $(U, S) = g(X, Y) = (\frac{X}{X+Y}, X + Y)$ où $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ avec $g_1(x, y) = x/(x + y)$ et $g_2(x, y) = x + y$.

Avec le changement de variables dans l'autre sens on a $x = us$ et $y = s(1 - u)$, donc la transformation réciproque de g est $(x, y) = g^{-1}(u, s) = (us, (1 - u)s)$, définie sur le domaine Δ que nous précisérons plus tard. Par le théorème de transformation d'un vecteur aléatoire (théorème de transfert), la densité du couple (U, S) est

$$h(u,s) = f_{X,Y} \circ g^{-1}(u,s)|DJ_{g^{-1}}|\mathbb{1}_\Delta(u,s) = 4use^{-s}|s|\mathbb{1}_\Delta(u,s) = 4us^2e^{-s}\mathbb{1}_\Delta(u,s).$$

La valeur absolue du Jacobien de g^{-1} est calculée comme suit

$$\left|DJ_{g^{-1}}\right| = \left|\text{dét}\begin{pmatrix} s & u \\ -s & 1-u \end{pmatrix}\right| = |s(1-u) + su| = |s|.$$

Enfin, pour déterminer le domaine Δ nous avons transformé l'ensemble où $f_{X,Y}$ ne s'annule pas par rapport aux nouvelles variables u et s. Les conditions $0 < us < (1-u)s$ et $0 < (1-u)s < +\infty$ permettent de trouver

$$\Delta = \left\{(u,s) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < u < 1/2,\ 0 < s < \infty\right\}.$$

(b) On peut calculer le densités marginales de U et de S comme suit, pour $0 \le u \le 1/2$,

$$h_U(u) = 4u\int_0^\infty s^2e^{-s}ds = 4u \times 2! = 8u,$$

et $h_U(u) = 0$ pour $u \notin [0, 2]$.
Pour, $0 < s < \infty$,

$$h_S(s) = 4s^2e^{-s}\int_0^{1/2} udu = \frac{s^2e^{-s}}{2},$$

et $h_S(s) = 0$ pour $u \le 0$.
Ainsi, les variables aléatoires U et S sont indépendantes car $h_U(u)h_S(s) = h(u,s)$ pour tout point de Δ. On pouvait aussi justifier l'indépendance du fait que le domaine Δ où la densité n'est s'annule pas, est un rectangle.

Exercice III *(5 points)*

Soit $D(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}$ le disque de centre $(0,0)$ et rayon r.

Soit (X,Y) un couple aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de loi uniforme dans le disque unitaire $D = D(0,1)$.

Soit $Z = 2\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$, la variable aléatoire réelle correspondant à la longueur de la corde du cercle unitaire, dont le milieu est le point (X,Y).

1. Donner la densité du couple (X,Y).

2. Calculer, pour tout $r \in [0,1]$: $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \le r^2)$.

3. Déterminer la densité de Z. (*Suggestion :* calculer d'abord sa fonction de répartition).

4. Calculer la probabilité que Z soit supérieure à la longueur de l'un des côtés du triangle équilatéral inscrit dans D.

5. Calculer la fonction génératrice des moments de Z.

Solution Exercice III :

1. La densité du couple (X,Y) est $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\mathbb{1}_D(x,y)$.

2. Les propriétés de la loi uniforme dans un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, et la relation $D(0,r) \subset D$, impliquent que

$$\mathbb{P}\left(X^2+Y^2 \leq r^2\right) = \mathbb{P}\left((X,Y) \in D(0.r)\right) = \frac{\text{Aire}(D(0,r))}{\text{Aire}(D)} = \frac{\pi r^2}{\pi} = r^2.$$

3. La v.a. Z est à valeurs dans $[0,2]$, donc sa fonction de répartition, pour $z \in [0,2]$ est égale à

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(2\sqrt{1-X^2-Y^2} \leq z\right) &= \mathbb{P}\left(1-X^2-Y^2 \leq \frac{z^2}{4}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^2+Y^2 > 1-\frac{z^2}{4}\right) = 1-\mathbb{P}\left(X^2+Y^2 \leq 1-\frac{z^2}{4}\right) \\ &= 1-\left(1-\frac{z^2}{4}\right) = \frac{z^2}{4}. \end{aligned}$$

   Cette f.d.r. est dérivable sur $]0,2[$, donc la fonction de densité est égale à sa dérivé dans cet intervalle, ainsi $f_Z(z) = \frac{z}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(z)$.

4. $\mathbb{P}(Z \geq \sqrt{3}) = 1 - F_Z(\sqrt{3}) = 1 - 3/4 = 1/4$.

5. La fonction génératrice des moments de Z est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ comme suit

$$\begin{aligned} M_Z(u) = \mathbb{E}\left[e^{uZ}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{uZ} f_Z(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^2 z e^{uz}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{u}e^{uz}\Big|_0^2 - \frac{1}{u^2}e^{uz}\Big|_0^2\right) \\ = \frac{1}{u}e^{2u} - \frac{1}{2u^2}e^{2u} + \frac{1}{2u^2}. \end{aligned}$$

Exercice IV *(6 points)*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli, de même paramètre p.

1. Soit $M_n = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}\text{ar}(M_n)$.
2. Donner, pour n grand, une approximation de $\mathbb{P}(M_n \geq p)$.
3. Montrer la convergence presque sûre de la suite M_n quand $n \to \infty$ en précisant la limite.

On définit maintenant la suite $Y_n = X_n X_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle i.i.d. ?

5. Soit $T_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_n)$.

6. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - p^2| \geq \epsilon) = 0$. Que peut-on en déduire sur la convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Solution Exercice IV :

1. $\mathbb{E}[M_n] = \dfrac{1}{n} n\mathbb{E}[X_1] = p$ et $\mathrm{Var}(M_n) = \dfrac{1}{n^2} n\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

2. Les hypothèses du TCL sont vérifiées pour la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq p\right) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - \mathbb{E}[M_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_n)}} \geq \frac{p - \mathbb{E}[M_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_n)}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \geq \frac{p-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\right)$$
$$\approx \mathbb{P}(Z \geq 0) = 1 - \Phi(0) = 1/2.$$

3. On peut appliquer la L.G.N. car la suite (X_i) est i.i.d., alors M_n converge p.s. vers $p = \mathbb{E}[X_1]$ quand $n \to \infty$.

4. Y_n étant le produit de deux v.a. de Bernoulli, est aussi de Bernoulli, et d'après l'indépendance de X_n et X_{n+1}, on a $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = p^2$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - p^2$. Il s'ensuit que $E(Y_n) = p^2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n) = p^2(1-p^2)$.

   La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiqement distribuée, mais pas indépendante. En effet, il y a une dépendance entre deux termes consécutifs de cette suite, comme on le verra dans le calcul de leur covariance à la question suivante.

5. D'après la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[T_n] = \dfrac{1}{n}(np^2) = p^2$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_n) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(\sum_{i=1}^n Y_i)$. Les v.a. $Y_1, \cdots, Y_n$ ne sont pas indépendantes, donc il faut utiliser la formule générale donnant la variance d'une somme de v.a., soit

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(Y_i, Y_j)\right),$$

   or $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_i)$ a été évalué ci-dessus. En ce qui concerne la covariance, deux cas sont à distinguer

   - Si $i+1 < j$, alors Y_i est une fonction de X_i et de X_{i+1} et Y_j est une fonction de X_j et de X_{j+1}; ces quatre v.a. sont indépendantes alors Y_i et de Y_j sont indépendantes et $Cov(Y_i, Y_j) = 0$.
   - Si $i + 1 = j$, alors d'après l'indépendance de X_i, X_{i+1} et X_{i+2} :

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, Y_{i+1}) &= \mathbb{E}(X_i(X_{i+1})^2 X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+1}X_{i+2}) \\ &= \mathbb{E}(X_i)E(X_{i+1}^2)\mathbb{E}(X_{i+2}) - \mathbb{E}(X_i)(\mathbb{E}(X_{i+1}))^2\mathbb{E}(X_{i+2}) \\ &= p^3 - p^4,\ (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

   D'où $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_n) = \dfrac{1}{n^2}(np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)) = \dfrac{p^2(1-p)}{n^2}(n + (3n-2)p)$.

6. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev à T_n avec $E(T_n) = p^2$, nous avons $P(|T_n - p^2| \geq \epsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_n)}{\epsilon^2}$, or d'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}\mathrm{ar}(T_n) = 0$. Comme ce résultat est vérifié pour tout $\epsilon > 0$, nous avons que $T_n \to p^2$ en probabilité quand $n \to \infty$.

Remarque : Dans ce cas, on ne pouvait pas utiliser la loi faible des grands nombres, car les Y_i ne sont pas deux à deux indépendantes en général.