SY01 / A23 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(5 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition de Ω, et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ s'écrit

$$X = \mathbb{1}_{A_1} + 2\mathbb{1}_{A_2} + \ldots n\mathbb{1}_{A_n}.$$

2 **1.** Écrire X^2 et $\ln(X)$ de la forme $a_1\mathbb{1}_{A_1} + a_2\mathbb{1}_{A_2} + \ldots a_n\mathbb{1}_{A_n}$, avec $a_1, \ldots, a_n$ des constantes réelles à préciser.

On considère maintenant $n = 3$, et une partition $\{A_1, A_2, A_3\}$ telle que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3)$.

1.5 **2.** Déterminer la loi de X, de X^2 et de $\ln(X)$.

1.5 **3.** Calculer $\mathbb{E}[X \ln(X)]$ et Var$(X^2 - X)$.

Exercice II *(8 points)*

Un enfant souhaite collectionner 3 figurines distinctes, vendues dans des boîtes “surprise”. Chaque boîte contient une seule figurine de la collection et l'unique manière d'identifier la figurine contenue dans une boîte est d'ouvrir cette boîte. On sait que les contenus des boites sont indépendants et identiquement distribués selon la loi uniforme.

On s'intéresse à la variable aléatoire T, correspondant au nombre de boîtes qu'il faut acheter pour posséder au moins un exemplaire de chacune des 3 figurines. On écrit $T = T_1 + T_2 + T_3$, où T_k est le nombre de boîtes supplémentaires (sans compter celles déjà achetées auparavant) nécessaires pour obtenir la k-ème figurine différente, quand on en a déjà $k - 1$ différentes, pour $k = 1, 2, 3$.

0.5 **1.** Quelle est la loi de T_1 ?

1.5 **2.** Justifier que T_2 et T_3 suivent la loi géométrique, dont on précisera les paramètres. Sont-elles indépendantes (*justifier sans calcul*) ?

2.5 **3.** Déterminer la loi de $T_2 + T_3$. En déduire la loi de T.

1 **4.** Calculer $\mathbb{E}[T]$ et Var(T).

1 **5.** Quelle est la probabilité que l'enfant soit obligé d'acheter 4 boîtes ou plus pour avoir la collection ?

1.5 **6.** Calculer la fonction génératrice de T.

(Question bonus - 1pt) On considère le même problème, mais avec n figurines à collectionner.

1 **7.** Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Exercice III *(7 points)*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

2 **1.** Calculer $\mathbb{E}\left[\dfrac{1}{X+1}\right]$.

Soient $P = \mathbb{P}(\{X \text{ est pair}\})$, et $I = \mathbb{P}(\{X \text{ est impair}\})$.

3 **2.** Montrer que $P - I = e^{-2\lambda}$. En déduire les valeurs de P et de I.

On pose $Y = f(X)$, où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad \text{est impair ou nul,} \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \quad \text{est pair et non nul.} \end{cases}$$

2 **3.** Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.