SY01 / A23 - MEDIAN

(Durée : 1h30 - fiche recto-verso A4 autorisée)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

Exercice I *(5 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition de Ω, et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ s'écrit

$$X = \mathbb{1}_{A_1} + 2\mathbb{1}_{A_2} + \ldots n\mathbb{1}_{A_n}.$$

1. Écrire X^2 et $\ln(X)$ de la forme $a_1\mathbb{1}_{A_1} + a_2\mathbb{1}_{A_2} + \ldots a_n\mathbb{1}_{A_n}$, avec $a_1, \ldots, a_n$ des constantes réelles à préciser.

On considère maintenant $n = 3$, et une partition $\{A_1, A_2, A_3\}$ telle que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3)$.

2. Déterminer la loi de X, de X^2 et de $\ln(X)$.

3. Calculer $\mathbb{E}\left[X \ln(X)\right]$ et Var$(X^2 - X)$.

Solution Exercice I:

1. Étant donné que le système d'évènements $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $i \neq j$, nous avons $\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j} \equiv 0$. En conséquence

$$X^2 = \mathbb{1}_{A_1} + 2^2\mathbb{1}_{A_2} + \ldots n^2\mathbb{1}_{A_n},$$
$$\ln(X) = 0 + \ln(2)\mathbb{1}_{A_2} + \ldots \ln(n)\mathbb{1}_{A_n}.$$

2. Comme $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de Ω, et ils ont tous la même probabilité, alors $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 1/3$. Nous avons que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $X^2(\Omega) = \{1, 4, 9\}$, $\ln(X)(\Omega) = \{0, \ln(2), \ln(3)\}$, et chacune de ces 3 variables suit respectivement la loi uniforme sur l'ensemble de ses valeurs.

3. On pose $Y = X\ln(X)$, alors Y suit la loi uniforme sur $\{0.2\ln(2), 3\ln(3)\}$, alors

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{2\ln(2) + 3\ln(3)}{3}.$$

On pose $Z = X^2 - X$, alors Z suit la loi uniforme sur $\{0, 2, 6\}$, alors

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{4 + 36}{3} - \left(\frac{2 + 6}{3}\right)^2 = \frac{56}{9}.$$

<u>Remarque</u> : Les v.a. X, X^2 et $\ln(X)$ ne sont pas indépendantes deux à deux !

Exercice II *(8 points)*

Un enfant souhaite collectionner 3 figurines distinctes, vendues dans des boîtes “surprise”. Chaque boîte contient une seule figurine de la collection et l’unique manière d’identifier la figurine contenue dans une boîte est d’ouvrir cette boîte. On sait que les contenus des boites sont indépendants et identiquement distribués selon la loi uniforme.

On s’intéresse à la variable aléatoire T, correspondant au nombre de boîtes qu’il faut acheter pour posséder au moins un exemplaire de chacune des 3 figurines. On écrit $T = T_1 + T_2 + T_3$, où T_k est le nombre de boîtes supplémentaires (sans compter celles déjà achetées auparavant) nécessaires pour obtenir la k-ème figurine différente, quand on en a déjà $k-1$ différentes, pour $k = 1, 2, 3$.

1. Quelle est la loi de T_1 ?

2. Justifier que T_2 et T_3 suivent la loi géométrique, dont on précisera les paramètres.
Sont-elles indépendantes (*justifier sans calcul*) ?

3. Déterminer la loi de $T_2 + T_3$. En déduire la loi de T.

4. Calculer $\mathbb{E}[T]$ et $\text{Var}(T)$.

5. Quelle est la probabilité que l’enfant soit obligé d’acheter 4 boîtes ou plus pour avoir la collection ?

6. Calculer la fonction génératrice de T.

(Question bonus - 1pt) On considère le même problème, mais avec n figurines à collectionner.

7. Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Solution Exercice II:

1. Au début, l’enfant n’a aucune figurine, alors $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$, il s’agit de la v.a. constante égale à 1.

2. Le contenu de chaque boîte étant indépendant et uniforme, une fois qu’on a l’une des 3 figurines, à chaque nouvel boîte achetée, la probabilité de retrouver la même figurine que l’on possède déjà est de $1/3$, et de tomber sur l’une des deux manquantes de $2/3$. Ceci est fait de manière indépendante jusqu’à ce que l’on tombe sur une différente de celle que l’on a déjà, donc $T_2 \sim \mathcal{G}(2/3)$. Un raisonnement similaire conduit à $T_3 \sim \mathcal{G}(1/3)$.

Les v.a. T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes, car d’une part, les tirages sont indépendants, donc les figurines obtenues après en avoir eu $k-1$ différentes sont indépendantes des précédentes, et donc de $T_1, \dots T_{k-1}$. Et, d’autre part, connaître les $k-1$ premiers types de figurines obtenus ne renseigne pas sur les temps $T_1, \dots, T_{k-1}$ mis à les obtenir, puisque chaque figurine est équiprobable.

3. Les v.a. T_2 et T_3 sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors la v.a. $T_2 + T_3$ est à valeurs dans l’ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, et nous pouvons déterminer sa loi par la convolution des lois de T_2 et de T_3. Pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2 + T_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_2 = k, T_3 = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_2 = k)\, \mathbb{P}(T_3 = n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} \frac{2}{3} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \frac{1}{3^n} \times 2 \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n .
\end{aligned}$$

Comme nous avons $T = T_2 + T_3 + 1$, cette v.a. est à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ on en déduit que, pour tout $n \geq 3$, $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T_2 + T_3 = n-1) = (2/3)^{n-1} - 2(1/3)^{n-1}$.

4. Par indépendance des v.a. T_1, T_2 et T_3, en utilisant la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[T_1 + T_2 + T_3] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2] + \mathbb{E}[T_3] = 1 + \frac{3}{2} + 3 = 5.5, \\
\mathrm{Var}(T) &= \mathrm{Var}(T_1 + T_2 + T_3) = \mathrm{Var}(T_1) + \mathrm{Var}(T_2) + \mathrm{Var}(T_3) = 0 + \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{9}{4}\frac{1}{3} + 9\frac{2}{3} = \frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

5. $\mathbb{P}(T \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(T = 3) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

6. Par indépendance des v.a. T_1, T_2 et T_3, nous avons pour tout $u \in [-1, 1]$,

$$g_T(u) = \mathbb{E}[u^T] = \mathbb{E}[u^{T_1}]\mathbb{E}[u^{T_2}]\mathbb{E}[u^{T_3}] = u \times \frac{\frac{2}{3}u}{1-\frac{2}{3}u} \times \frac{\frac{1}{3}u}{1-\frac{1}{3}u} = \frac{2u^3}{(3-2u)(3-u)}.$$

7. Nous pouvons généraliser le problème et les résultats des questions 1 et 2 au cas de n figurines, donc $T = T_1 + \ldots T_n$ où $T_k \sim \mathcal{G}(\frac{n-k+1}{n})$ pour $k = 1, \ldots, n$. Alors

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[T_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}\right).$$

Exercice III *(7 points)*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right]$.

Soient $P = \mathbb{P}(\{X \text{ est pair}\})$, et $I = \mathbb{P}(\{X \text{ est impair}\})$.

2. Montrer que $P - I = e^{-2\lambda}$. En déduire les valeurs de P et de I.

On pose $Y = f(X)$, où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est impair ou nul,} \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

Solution Exercice III:

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k)!}-1\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\end{aligned}$$

2.

$$P - I = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!} = e^{-2\lambda}.$$

Nous avons que $P + I = 1$ car il s'agit d'une loi de probabilité, alors

$$P = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}, \quad \text{et} \quad I = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}.$$

3. La v.a. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, mais nous devons distinguer deux cas

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(\{X \text{ est impair}\}) = e^{-\lambda} + I = e^{-\lambda} + \frac{1-e^{-2\lambda}}{2},$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}.$$