SY01 / A23 - TEST - Corrigé

(Durée : 45min - aucun document autorisé)

Les réponses doivent être justifiées soigneusement.

---

8 Exercice I *(8 points)*

On lance une pièce deux fois. On note F_i l'événement "obtenir face au i-ème lancer", pour $i = 1, 2$.

1.5 **1.** Donner un espace fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire, et exprimer F_i, $i = 1, 2$ à partir des évènements élémentaires de Ω.

1.5 **2.** Exprimer à l'aide des évènements F_i, $i = 1, 2$ les événements suivants : A = "obtenir au moins une fois face", B = "obtenir exactement une fois face", C = "obtenir deux fois pile".

3. Considérons les deux tribus $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, F_1, \overline{F_1}\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, F_2, \overline{F_2}\}$.

0.5 (a) $\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2$ est-elle une tribu sur Ω ? Justifier.

1.5 (b) $\mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2$ est-elle une tribu sur Ω ? Justifier.

On suppose que la pièce n'est pas forcément équilibrée et que la probabilité d'obtenir pile sur chaque tirage est égale à $p \in]0; 1[$ (les deux tirages sont indépendants). On considère l'événement D = "les résultats des deux lancers sont différents".

3 **4.** Vérifier que F_1 et D sont indépendants si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Solution:

1. $\Omega = \{F, P\}^2 = \{FF, FP, PF, PP\}$, $F_1 = \{FP, FF\}$, $F_2 = \{PF, FF\}$.

Remarque : par simplicité, on a écrit $FF, FP, \ldots$ à la place de $(F, F), (F, P), \ldots$

2. $A = F_1 \cup F_2$, $B = (F_1 \cup F_2) \backslash (F_1 \cap F_2) = F_1 \Delta F_2$, $C = \overline{A} = \overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$.

3. (a) $\mathcal{F}_1 \bigcap \mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu, demontré en cours, il s'agit de la tribu dite *grossière* .

(b) $\mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, F_1, \overline{F_1}, F_2, \overline{F_2}\}$, ce n'est pas une tribu car, par exemple, $F_1 \cup F_2 = \{FP, FF, PF\} \notin \mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2$.

4. $D = \{FP, PF\}$, alors $\mathbb{P}(F_1 \cap D) = \mathbb{P}(\{FP\}) \overset{0.5}{=} (1 - p)p$, $\mathbb{P}(D) \overset{0.5}{=} 2p(1 - p)$ et $\mathbb{P}(F_1) \overset{0.5}{=} p(1 - p) + (1 - p)^2 = 1 - p$, donc

$$\underbrace{\mathbb{P}(F_1 \cap D) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(D)}_{0.5} \Longleftrightarrow (1 - p)p = 2p(1 - p)^2 \underset{1}{\Longleftrightarrow} 1 = 2(1 - p) \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

8 **Exercice II** *(8 points)*

Un facteur distrait doit distribuer n lettres ($n \in \mathbb{N}^*$), chacune destinée à une personne différente. Il les distribue de manière aléatoire dans les n boîtes aux lettres (“BAL”), mais il oublie où il est déjà passé (il pourra mettre plusieurs dans une même BAL, ou laisser des BAL vides).

1. Donner un ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire pour

0.5 (a) $n = 2$.

1.5 (b) n quelconque.

Pour un n quelconque, soit $B_i =$ “la BAL du destinataire i est vide”, $i = 1, \dots, n$.

4 **2.** Calculer $\mathbb{P}(B_i)$, $\mathbb{P}(B_1 \cap B_n)$, $\mathbb{P}(B_1 \cup B_n)$.

2 **3.** Calculer $\mathbb{P}(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$.

Solution:

1. (a) Pour $n = 2$, soient l_1 et l_2 les deux lettres et B_1, B_2 les deux BAL. Nous avons 4 possibilités : l_1 et l_2 vont dans B_1, l_1 et l_2 vont dans B_2, l_1 va dans B_1 et l_2 dans B_2, l_1 va dans B_2 et l_2 dans B_1. On peut prendre $\Omega = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$ où le couple (i, j) correspond à la lettre 1 va dans la BAL i et la lettre 2 dans la BAL j, pour $i, j = 1, 2$.
On se rend compte que pour chacune des n lettres, on a n possibilités pour la BAL dans laquelle elle peut être deposée.

(b) Pour n quelconque, soit $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, n\}, i = 1, \dots, n\}$, où $x_i = j$ si la lettre i va dans la BAL j, pour $i, j = 1, \dots, n$. Alors $|\Omega| = n^n$.

2. D'après l'ennoncé et la définition de Ω ci-dessus, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1}{n^n}$. Alors, $\mathbb{P}(B_i) = \dfrac{|B_i|}{n^n}$. L'évènement $B_i =$ “la BAL du destinataire i est vide” correspond à choisir parmi $n-1$ BAL, en excluant la $i-$ème, ce qui équivaut à

$$B_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \{1, \dots, n\}, x_j \neq i, \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Donc $\mathbb{P}(B_i) = \dfrac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. De manière analogue $\mathbb{P}(B_1 \cap B_n) = \dfrac{(n-2)^n}{n^n}$.
Finalement $\mathbb{P}(B_1 \cup B_n) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_n) = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

3. En passant au complémentaire nous avons

$$\mathbb{P}\left(B_1 \cup \ldots \cup B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}\right) = 1 - \frac{n!}{n^n},$$

car l'évènement $\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n} =$ “aucune BAL n'est vide”, soit $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$, ce qui correspond à l'ensemble de permutations de $\{1, \dots, n\}$.

4 **Exercice III** *(4 points)*

On considère deux lots d'articles de même type, le premier contient n_1 articles défectueux et m_1 bons articles ; et le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles. On choisit au hasard l'un des lots, pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article tiré soit défectueux lui aussi ?

Solution:

1. Soit D_i = "l'$i-$ème article est défectueux, et L_i = "le lot i est tiré", pour $i = 1, 2$. Nous recherchons ,

$$\mathbb{P}\left(D_2 \mid D_1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(D_2 \bigcap D_1\right)}{\mathbb{P}(D_1)}. \quad 1$$

Nous pouvons appliquer loi de probabilités totales par rapport au lot tiré, vu que $\Omega = L_1 \cup L_2$, et $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Nous avons

1
$$\mathbb{P}\left(D_1\right) = \mathbb{P}\left(D_1 \mid L_1\right)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}\left(D_1 \mid L_2\right)\mathbb{P}(L_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+m_1} + \frac{n_2}{n_2+m_2}\right)$$

2
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(D_1 \cap D_2\right) &= \mathbb{P}\left(D_1 \cap D_2 \mid L_1\right)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}\left(D_1 \cap D_2 \mid L_2\right)\mathbb{P}(L_2) \\
&= \mathbb{P}\left(D_2 \mid L_1 \cap D_1\right)\mathbb{P}\left(D_1 \mid L_1\right)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}\left(D_2 \mid L_2 \cap D_1\right)\mathbb{P}\left(D_1 \mid L_2\right)\mathbb{P}(L_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+m_1} \times \frac{n_1-1}{n_1+m_1-1} + \frac{n_2}{n_2+m_2} \times \frac{n_2-1}{n_2+m_2-1}\right),
\end{aligned}$$

où l'avant dernière ligne est une application de la formule des probabilités composées. Finalement

$$\mathbb{P}\left(D_2 \mid D_1\right) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_1+m_1} \times \frac{n_1-1}{n_1+m_1-1} + \frac{n_2}{n_2+m_2} \times \frac{n_2-1}{n_2+m_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1+m_1} + \frac{n_2}{n_2+m_2}\right)}.$$