MT94/P24/TD - Valeurs propres et méthodes numériques (suite)

1 Méthode de déflation

La méthode de la puissance itérée (resp. puissance inverse) permet de déterminer la plus grande (resp. plus petite) valeur propre en valeur absolue ou module d'une matrice carrée A. Pour déterminer toutes les valeurs propres, il faut y ajouter une technique de "déflation" permettant en quelque sorte de retirer de la matrice la valeur propre trouvée.

La méthode de déflation pour une matrice quelconque est assez technique. Plaçons nous dans le cadre plus simple des matrices A **symétriques** (diagonalisables, de valeurs propres réelles avec des vecteurs propres orthonormés).

Considérons la matrice symétrique A de taille $n \times n$ définie par

$$A = \texttt{tridiag}(-1, 2-1). \tag{1}$$

On peut montrer théoriquement que

$$\lambda_k(A) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, ..., n.$$

Les valeurs propres λ_k se répartissent donc sur l'intervalle ouvert $]0, 4[$. Pour n assez grand, on aura $\lambda_n(A) \sim 4$ et $\lambda_1(A) \sim 0$. Supposons qu'on utilise la méthode de la puissance itérée. Elle trouvera ainsi une valeur approchée de λ_n avec un vecteur propre $\boldsymbol{r}_n$ associé ($\|\boldsymbol{r}_n\| = 1$).

Considérons maintenant la matrice A_1 définie par

$$A_1 = A - \lambda_n \boldsymbol{r}_n \boldsymbol{r}_n^T.$$

La matrice A_1 est toujours carrée et symétrique.

1. On remarque d'abord que

$$A_1\boldsymbol{r}_n = A\boldsymbol{r}_n - \lambda_n\boldsymbol{r}_n\langle\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{r}_n\rangle = A\boldsymbol{r}_n - \lambda_n\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{0}$$

   donc la paire $(0, \boldsymbol{r}_n)$ est une paire propre de A_1 (valeur propre 0).

2. Pour $k \neq n$, on a

$$A_1\boldsymbol{r}_k = A\boldsymbol{r}_k - \lambda_n\boldsymbol{r}_n\langle\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{r}_k\rangle = A\boldsymbol{r}_k = \lambda_k\boldsymbol{r}_k$$

   car $\langle\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{r}_k\rangle = 0$ (vecteurs orthogonaux). Donc la paire $(\lambda_k, \boldsymbol{r}_k)$ est une paire propre de A_1.

En conclusion, le spectre (ensemble des valeurs propres) de A_1 est $\{0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}\}$. L'application de la méthode de la puissance itérée sur A_1 donnera la valeur propre λ_{n-1}, de vecteur propre $\boldsymbol{r}_{n-1}$. En répétant l'opération n fois, on obtiendra toutes les valeurs propres de A.

1.1 Expérimentation Scilab

1. En Scilab, utiliser $n = 20$ et coder la matrice A de (1).

2. Appliquer la méthode de la puissance itérée et vérifier que vous trouvez la paire propre $(\lambda_n, \boldsymbol{r}_n)$. On pourra comparer aux résultats obtenus avec la macro `spec()`.

3. Calculer A_1 et appliquer la méthode de la puissance itérée à A_1. Vérifier que vous obtenez la paire propre $(\lambda_{n-1}, \boldsymbol{r}_{n-1})$.

4. Écrire une fonction Scilab

```
[D, V] = deflation_sym(A, tol, kmax)
```

permettant de calculer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A symétrique. Les valeurs propres λ_k seront stockées dans la matrice diagonale D et les vecteurs propres $\boldsymbol{r}_k$ seront mis en colonne dans la matrice V. Le paramètre `tol` sera le paramètre de tolérance pour la méthode de la puissance itérée et `kmax` le nombre maximal d'itérations (ajouter un message d'alerte si `kmax` est atteint).

2 Valeurs propres et systèmes d'équations différentielles linéaires

Les valeurs propres/vecteurs propres sont aussi des outils précieux pour résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre, homogènes ou non. On souhaite déterminer les solutions $\boldsymbol{u}$ du système différentiel

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

2.1 Partie théorique : solutions à variables séparées, cas homogène

On considère le cas homogène $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u}.$$

On cherche une solution de la forme

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}\,\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$$

où $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $\boldsymbol{v}$ et $\varphi(t)$ doivent vérifier les identités

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}, \\ \varphi'(t) = \lambda\,\varphi(t). \end{cases}$$

Autrement dit $\boldsymbol{v}$ est vecteur propre de A de valeur propre λ. On obtient alors une solution de la forme

$$\boldsymbol{u}(t) = C\boldsymbol{v}\,e^{\lambda t}$$

où C est une constante réelle.

2.2 Principe de superposition

En déduire que si $(\lambda_k, \boldsymbol{r}_k)$ sont les paires propres de la matrice A, alors $\boldsymbol{u}(t)$ définie par

$$\boldsymbol{u}(t) = \alpha_1\,\boldsymbol{r}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \alpha_n\,\boldsymbol{r}_n e^{\lambda_n t} \tag{2}$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ est aussi solution du système différentiel homogène. Il y a n constantes libres.

2.3 Condition initiale

Supposons maintenant que l'on cherche la courbe intégrale qui passe par la donnée initiale $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$. Comme la base $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_n)$ est orthonormée, on peut décomposer $\boldsymbol{u}_0$ dans cette base :

$$\boldsymbol{u}_0 = \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_1 \rangle\, \boldsymbol{r}_1 + ... + \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_n \rangle\, \boldsymbol{r}_n. \tag{3}$$

Parallèlement, en considérant (2) à $t = 0$, par identification on obtient :

$$\alpha_k = \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_k \rangle \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

La solution du système différentiel de donnée initiale est donc

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_k \rangle\, \boldsymbol{r}_k e^{\lambda_k t}. \tag{4}$$

2.4 Partie pratique : systèmes différentiels linéaires du second ordre

Le principe reste valable pour les équations différentielles linéaires du second ordre. On traitera dans le TP le cas homogène :

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2} - A\boldsymbol{u} = 0.$$

1. Cherchez une solution de la forme

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}\,\varphi(t)$$

   et montrer que $\boldsymbol{v}$ et φ doivent vérifier les identités

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}, \\ \varphi''(t) = \lambda\,\varphi(t). \end{cases} \tag{5}$$

2. On considère la matrice symétrique A de taille $n \times n$ définie par

$$A = -(n+1)^2\ \texttt{tridiag}(-1, 2, -1)$$

   Toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives, A est donc symétrique définie négative. Pour $(\lambda, \boldsymbol{v})$ paire propre de A, vérifier que $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = \alpha\,\cos(\sqrt{-\lambda}t) + \beta\,\sin(\sqrt{-\lambda}t)$$

   où α et β sont deux constantes réelles. En Scilab, calculer les valeurs propres de A à l'aide de la macro `spec()` (on prendra $n = 200$).

3. Principe de superposition. - On note

$$\varphi_k(t) = \cos(\sqrt{-\lambda_k}\,t), \quad \psi_k(t) = \sin(\sqrt{-\lambda_k}\,t)$$

   En considérant toutes les paires propres $(\lambda_k, \boldsymbol{r}_k)$ de A, vérifier que $\boldsymbol{u}(t)$ définie par

$$\boldsymbol{u}(t) = (\alpha_1\,\varphi_1(t) + \beta_1\,\psi_1(t))\,\boldsymbol{r}_1\ + ... + (\alpha_n\,\varphi_n(t) + \beta_n\,\psi_n(t))\,\boldsymbol{r}_n. \tag{6}$$

   est aussi solution du système différentiel homogène. Il y a $(2n)$ constantes indépendantes $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $(\beta_1, ..., \beta_n)$.

4. Donnée initiale : on cherche désormais la solution de donnée initiale $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^n$. Vérifier d'abord que

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \sqrt{-\lambda_1}\,(\beta_1\,\varphi_1(t) - \alpha_1\,\psi_1(t))\,\boldsymbol{r}_1\ + ... + \sqrt{-\lambda_n}\,(\beta_n\,\varphi_n(t) - \alpha_n\,\psi_n(t))\,\boldsymbol{r}_n.$$

   À $t = 0$, par identification, montrez que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{cases} \alpha_k = \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_k \rangle, \\ \beta_k = \dfrac{\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{r}_k \rangle}{\sqrt{-\lambda_k}}, \end{cases}$$

   ce qui donne la solution analytique.

5. Exemple numérique : On prendra $n = 200$. $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}_n$, $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ donnée par

$$(\boldsymbol{u}_0)_j = g(x_j), \quad j = 1, ..., n, \qquad \text{où } g(x) = \frac{27}{4}x^2(1-x), \quad x_j = \frac{j}{n+1}.$$

   D'après les résultats des questions précédentes, la solution $\boldsymbol{u}(t)$ est donnée par l'expression analytique

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{r}_k \rangle\ \cos(\sqrt{-\lambda_k}\,t)\,\boldsymbol{r}_k. \tag{7}$$

   Avec la macro `spec()`, calculez les valeurs propres λ_k et vecteurs propres $\boldsymbol{r}_k$.

   NB : On visualisera la solution de façon animée au cours du temps t, $t \in [0, T]$ (on prendra $T = 50$). Aidez-vous du script suivant pour tracer la solution $\boldsymbol{u}(t)$ au cours du temps : //

```
h = 1.0 / (n+1);
x = (h : h : 1-h)'; // Tableau des xj
u0 = g(x);
plot(x, u, '.-'); xgrid();
dt = 0.02; // Incrément de temps
T = 15;
t = 0; // temps initial
while (t < T)
        t = t + dt;
        u = 0*x;
        for j=1:n
                u = u + // A COMPLETER
        end; // for j
        //
        drawlater;
        clf; plot(x, u, '.-', 0, -1, '.', 1, 1, '.'); xgrid();
        drawnow
        disp(t)
end // while
```

Rem : bravo, vous venez de résoudre l'équation des ondes homogène (corde élastique) :) .