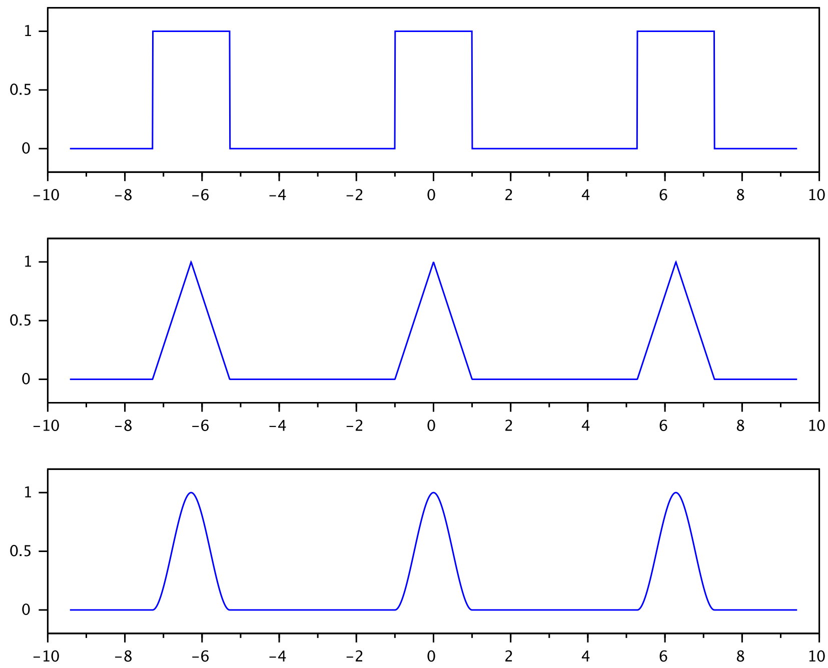
MT94/P24/TD - Séries de Fourier, équation de la chaleur

1 Convergence et phénomène de Gibbs



On considère les trois fonction $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, **paires** et périodiques de période 2π, et définies sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f_3(x) = \begin{cases} 1-x^2+2x^2(|x|-1), & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. Calculer les coefficients de la série de Fourier de f_i (utilisez Wofram Alpha si nécessaire...). Commenter leur vitesse de décroissance en fonction de la régularité de f_i (continue ? dérivable ?).
2. On note $S_n(x)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f_i :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

   Ecrire un programme Scilab représentant $S_n(x)$ pour des valeurs croissantes de n, et commenter la convergence. Que se passe-t-il de particulier pour f_1 ?

2 Equation de la chaleur

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ x \in]-\pi,\pi[,\ t > 0, \tag{1}$$

où u est supposée paire et 2π-périodique par rapport à la variable x (voir le cours). On ajoute à cette équation la condition initiale

$$u(x,0) = f_i(x), x \in [-\pi, \pi],$$

où f_i, $i = 1,2,3$ a été définie à la question précédente.

Ecrire un programme Scilab représentant une bonne approximation de $u(x,t)$ pour $t > 0$ sous la forme d'une surface ou d'une animation, pour chacune des fonctions f_i.