MT09 - Analyse numérique
$\rightarrow$ label "ModMat"

Vincent MARTIN (LMAC, GI),
Faker BEN BELGACEM (LMAC, GI),
Florian DE VUYST (BMBI, GB)

Organisation de l'UV

- Organisation
  - 2h de cours - mardi 16h30-18h30 (salle FA104),
  - 2h de TD,
  - 2h de TP tous les 15 jours, notés, présence obligatoire.
  - 1h de soutien optionnel (MA09) - mardi 18h30-19h30 : inscription obligatoire aujourd'hui.

Planning

MT09 A2023													
			L	L	Ma	Ma	Ma	Me	Me	J	V	Observations
lundi		vendredi	TD1	TP1	TD2	TP2	Cours	TD3	TP	TP3 & TP4	TD4	
du 4 septembre	au	8 septembre					Cours 1 : Chap1					Semaine de rentrée : ni TD, ni TP
du 11 septembre	au	15 septembre	TD1	A1	TD1	A1	Cours 2 : Chap2	TD1		A1	TD1	
du 18 septembre	au	22 septembre	TD2	B1	TD2	B1	Cours 3 : Chap2	TD2		B1	TD2	
du 25 septembre	au	29 septembre	TD3	A2	TD3	A2	Cours 4 : Chap2	TD3		A2	TD3	
du 02 octobre	au	06 octobre	TD4	B2	TD4	B2	Cours 5 : Chap4	TD4		B2	TD4	
du 09 octobre	au	13 octobre	TD5	A3	TD5	A3	Cours 6 : Chap4	TD5		A3	TD5	
du 16 octobre	au	20 octobre	TD6	B3	TD6	B3	Cours 7 : Chap5	TD6		X	TD6	Jeudi 19/10 Comutec : pas CM, pas TD, pas TP.
du 23 octobre	au	27 octobre	Je : TP B3		X	A4	Médian	X		A4	X	Médians : TP assurés. Pas de TD du 24/10 au 06/11 inclus. Médian à la place du cours. Lundi 23/10= Jeudi B3.
du 30 octobre	au	3 novembre										Vacances d'automne : du 30/10 au 04/11 inclus
du 06 novembre	au	10 novembre	X	A4	TD7	B4	Cours 8 : Chap5/6	TD7		B4	TD7	
du 13 novembre	au	17 novembre	TD7	B4	TD8	A5	Cours 9 : Chap6/3	TD8		A5	TD8	
du 20 novembre	au	24 novembre	TD8	A5	TD9	B5	Cours 10 : Chap3	TD9		B5	TD9	
du 27 novembre	au	01 décembre	TD9	B5	TD10	A6	Cours 11 : Chap3	TD10		A6	TD10	
du 04 décembre	au	08 décembre	TD10	A6	TD11	B6	Cours 12 : Chap7	TD11		B6	TD11	
du 11 décembre	au	15 décembre	TD11	B6	TD12	A7	Cours 13 : Chap7	TD12		A7	TD12	
du 18 décembre	au	22 décembre	TD12	A7	TD13	B7	Cours 14 : Chap7	TD13		B7	TD13	Vacances de fin d'année : du 23/12 au 02/01 inclus
du 25 décembre	au	29 décembre										
du 01 janvier	au	05 janvier						Lu:TD13	Lu : B7			Mercredi 03/01 = Lundi B7.
du 08 janvier	au	12 janvier			examens finaux							Examens finaux du 5/01 au 13/01 inclus

Cours : mardi 16h30 FA104
TD1 : lundi 10h15 FA404 :
TD2 : mardi 8h00 FA406 :
TD3 : mercredi 10h15 FA518 :
TD4 : vendredi 10h15 FA504 :

Soutien (MA09) : mardi 18h30
TP1 : lundi 14h15 FA506 :
TP2 : mardi 10h15 FA506 :
TP3 : jeudi 8h00 FA506 :
TP4 : jeudi 10h15 FB506 :

Médian : mardi 24 octobre, 16h30 – 18h30 (à confirmer).

Début des TPs notés le 25 septembre

Cours : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
    - $\rightarrow$ disponibles à la BU (en vente)
    - $\rightarrow$ sur le site moudeul de MT09, avec corrections ou aides en ligne.

Cours : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
    - → disponibles à la BU (en vente)
    - → sur le site moudeul de MT09, avec corrections ou aides en ligne.
  - Travail régulier :
    - Refaire les démonstrations de cours.
    - Prendre des exemples pour comprendre les théorèmes.
    - Travailler les exercices d'application du cours.
    - Voir les aides sur moudeul.
    - Travailler en petit groupe (attention !).
    - Réviser les cours précédents : algèbre linéaire (MT23 et chap 0), analyse d'une ou plusieurs variables réelles (MT90-91, MT22).
    - Complémentaire de MT94, NF04...
  - Poser des questions en cours, en TD, en TP et sur le forum moudeul.

Cours : déroulement

- Cours
  - Polycopiés très complets.
    - → disponibles à la BU (en vente)
    - → sur le site moudeul de MT09, avec corrections ou aides en ligne.
  - Travail régulier :
    - Refaire les démonstrations de cours.
    - Prendre des exemples pour comprendre les théorèmes.
    - Travailler les exercices d'application du cours.
    - Voir les aides sur moudeul.
    - Travailler en petit groupe (attention !).
    - Réviser les cours précédents : algèbre linéaire (MT23 et chap 0), analyse d'une ou plusieurs variables réelles (MT90-91, MT22).
    - Complémentaire de MT94, NF04...
  - Poser des questions en cours, en TD, en TP et sur le forum moudeul.
  - Cours avec M. Ben Belgacem et M. Martin.
  - Contenu :
    - aujourd'hui : introduction à l'analyse numérique
    - chapitre 0 (rappels d'algèbre linéaire) non traité
    - rappels d'algèbre linéaire aux moments utiles

TD : déroulement

- TD
  - Avoir travaillé le cours AVANT le TD.
  - Exercices en annexes des polys.

TD : déroulement

- TD
  - Avoir travaillé le cours AVANT le TD.
  - Exercices en annexes des polys.
- TP
  - 2h (semaine A ou B)
  - 7 TPs par étudiant : présence obligatoire.
    - 1ère séance : prise en main de scilab + exercices sur les flottants
    - séances 2 à 7 : TPs notés au cours de la séance.
  - Introduction au numérique et à la programmation.
  - Programmation en SCILAB (gratuit, similaire à matlab).
  - Préparation à faire **AVANT** le TP :
    programme écrit et testé en scilab présenté au début du TP.

Soutien et évaluation

- Soutien
  - une séance de 1h de soutien :
    - mardi 18h30-19h30, après le cours
  - déroulement : séances de réponses aux questions des étudiants
  - **s'inscrire aujourd'hui** pour prise en compte dans votre emploi du temps

Soutien et évaluation

- Soutien
  - une séance de 1h de soutien :
    - mardi 18h30-19h30, après le cours
  - déroulement : séances de réponses aux questions des étudiants
  - **s'inscrire aujourd'hui** pour prise en compte dans votre emploi du temps
- Évaluation
  - médian : 40%
  - final : 40% (note < 6 : éliminatoire)
  - TP : 20% (moyenne < 10 : éliminatoire)

examen médian mardi 24 octobre 2023 de 16h30 à 18h30
durée à confirmer,
à la place du cours

- déroulement du médian et du final :
  - 1/4 de la durée de l'examen : questions de cours sans document ni outil électronique
  - 3/4 de la durée de l'examen : problèmes et exercices. Documents autorisés : exclusivement polycopiés de cours et de Scilab, pas d'outil électronique.

Documents

- Polycopiés
  - chapitres 0 à 2 : distribution
  - chapitres 3 à 8 : en vente à la BUTC
  - polycopié Scilab : distribution

- Plateforme moudeul
  moodle.utc.fr/course/view.php?id=665
  - chapitres de cours avec exercices de cours et de TD (avec corrections et/ou indications)
  - forum : vos questions peuvent intéresser les autres !
  - annales
  - planning du semestre
  - équipe enseignante

Contenu du cours

- Chapitres du polycopié de cours
  - chapitre 0 : révisions d'algèbre linéaire (non traité en cours).
  - chapitre 1 : introduction au calcul flottant.
  - chapitre 2 : résolution de systèmes linéaires par méthodes directes.
  - chapitre 3 : problèmes de moindres carrés.
  - chapitre 4 : résolution de systèmes linéaires et non linéaires par méthodes itératives.
  - chapitre 5 : interpolation.
  - chapitre 6 : intégration numérique.
  - chapitre 7 : résolution numérique des équations différentielles.
  - chapitre 8 : calcul des valeurs propres et vecteurs propres.

- Plateforme moudeul
  moodle.utc.fr/course/view.php?id=665

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :

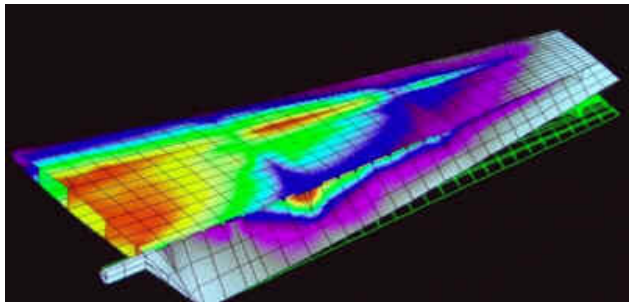
Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...

Exemple : étude d'une aile d'avion



- limiter les essais réels souvent trops chers ou irréalisables (structures uniques), les remplacer par des essais virtuels
- $\Rightarrow$ disposer de modèles (même complexes) prédictifs

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...
  - l'analyse mathématique
    - objectif : étude des équations précédentes
    - existence, unicité de solutions
    - nature des solutions : stables, instables, régulières, singulières. . .

Introduction

- L'analyse numérique : discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique
  Trois étapes :
  - la modélisation :
    - objectif : décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
    - mise en équation des phénomènes physiques observés
    - sous-entendu : hypothèses, domaine de validité limité, description partielle parfois erronée de la réalité, ...
  - l'analyse mathématique
    - objectif : étude des équations précédentes
    - existence, unicité de solutions
    - nature des solutions : stables, instables, régulières, singulières...
  - la résolution numérique et la programmation
    beaucoup de problèmes n'ont pas de solutions analytiques : recours aux ordinateurs pour la résolution
    - choix et étude de la méthode de résolution
    - écriture des algorithmes de résolution
    - analyse de la solution

Quelques exemples

... où la résolution numérique est incontournable

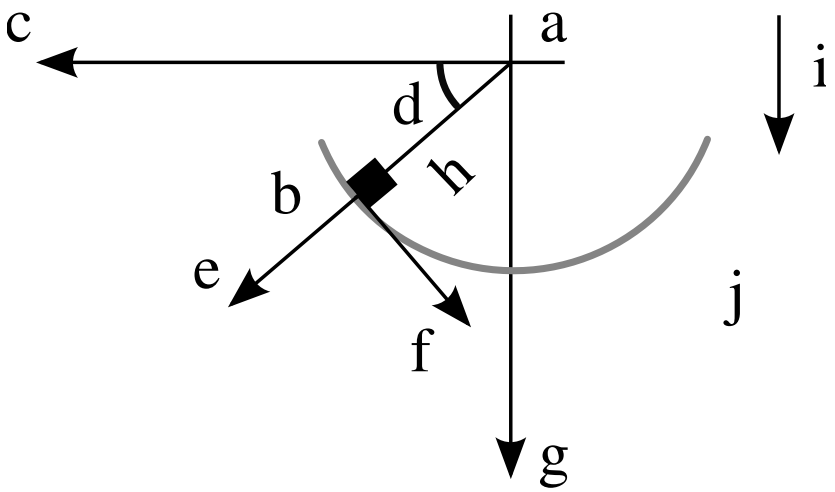
- Un exemple simple : un cube glisse avec frottement sur une piste circulaire

  à l'aller :

$$R\ddot{\theta} = g(\cos\theta - f\sin\theta) - fR\dot{\theta}^2$$

  au retour :

$$R\ddot{\theta} = g(\cos\theta + f\sin\theta) + fR\dot{\theta}^2$$

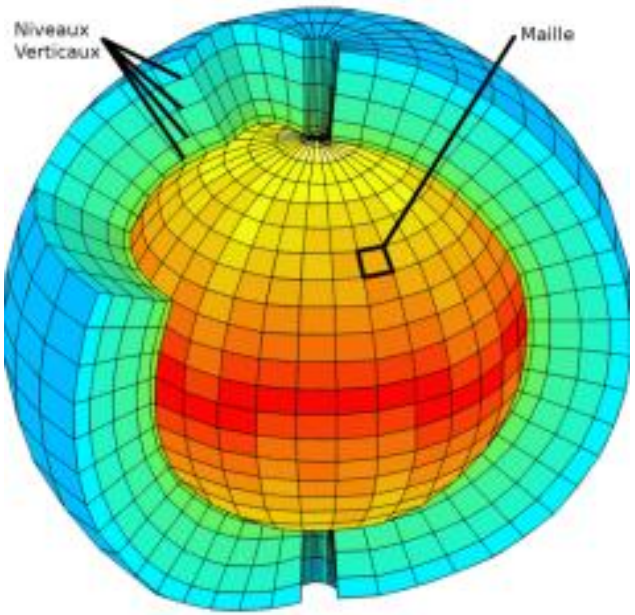


PS91 - extrait d'un médian

Quelques exemples

... où la résolution numérique est incontournable

- Les prévisions météorologiques :
  site de Météo France :
  "La prévision météorologique repose sur deux piliers : la prévision c'est-à-dire la simulation de l'atmosphère sur super-calculateur, et l'analyse et la mise en forme des résultats par des experts prévisionnistes."



Introduction

- **Domaines d'application**
  physique, mécanique, aéronautique, génie civil, électromagnétisme, météorologie, sciences de l'environnenement (pollution, nappes phréatiques, inondations...), biologie, chimie, informatique...

- **Enjeux de l'analyse numérique**
  maîtriser les erreurs pour garantir la prédictivité des calculs
  - erreurs d'arrondis
  - erreurs de convergence
  - erreurs de discrétisation

Effets des erreurs d'arrondi

- Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Première méthode

- Relation de récurrence :

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \ , \ I_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

- Algorithme de calcul :

```
I(1) = 1-1/e
pour k = 1 jusqu'à n
  I(k+1) = -1/e + kI(k)
fin pour
```

Remarque : I_k est stocké dans $I(k+1)$

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
$\vdots$	$\vdots$
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
$\vdots$	$\vdots$

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Remarques :
  - $|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $I_n = -\alpha_n \dfrac{1}{e} + n!\, I_0$
    avec $\alpha_n > 0$ de l'ordre de $n!$, car I_n tend vers 0.
    (Réc. : $\alpha_n = n\,\alpha_{n-1} + 1$, $n \geqslant 1$.)

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
$\vdots$	$\vdots$
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
$\vdots$	$\vdots$

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Inp1]=suite(n)
I(1) = 1- 1/exp(1)
for k=1:n
  I(k+1)=-1/exp(1)+k*I(k)
end
Inp1 = I(n+1)
endfunction
```

- Remarques :
  - $|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - $I_n = -\alpha_n \frac{1}{e} + n!\, I_0$
    avec $\alpha_n > 0$ de l'ordre de $n!$, car I_n tend vers 0.
    (Réc. : $\alpha_n = n\,\alpha_{n-1} + 1$, $n \geqslant 1$.)
  - Donc $-\alpha_n \frac{1}{e} \to -\infty$ et $n!\, I_0 \to +\infty$ et se compensent presque parfaitement.
    $\Rightarrow$ grosses erreurs d'arrondi.

- Résultat du calcul direct

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
⋮	⋮
15	0.0243801
20	- 82.176892
30	- 8.962D+15
40	- 2.757D+31
⋮	⋮

Effets des erreurs d'arrondi

- Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Deuxième méthode

- Relation de récurrence :

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{e} + I_n\right) \ , \ I_N = 0 \text{ pour } N >> n$$

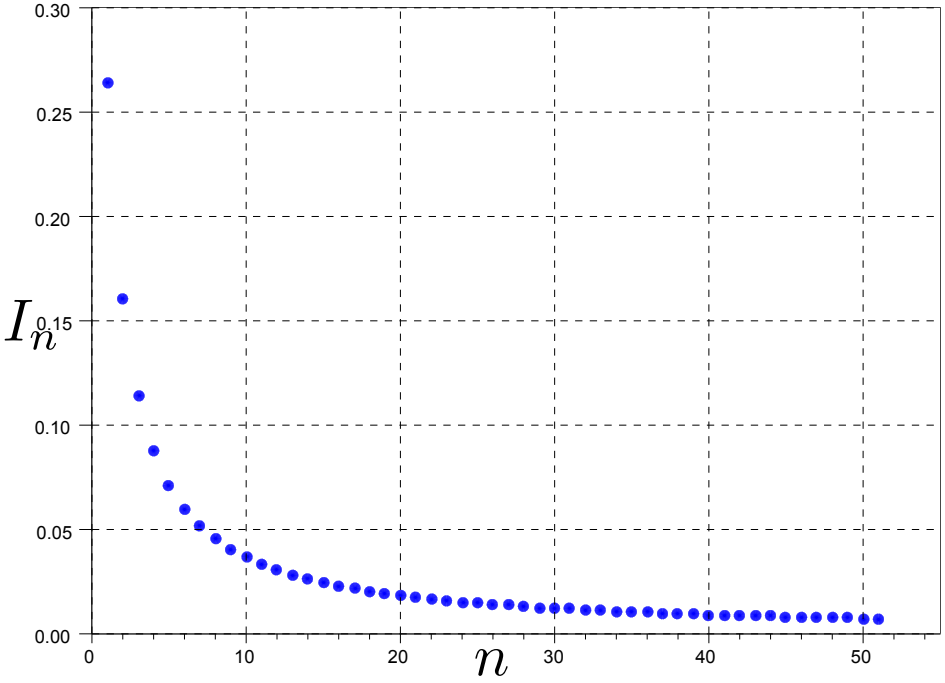
- Algorithme de calcul :

```
I(N+1) = 0
pour k = N jusqu'à n+1 (pas de -1)
  I(k) = (1/k)*(1/e+I(k+1))
fin pour
```

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [Jnp1]=suiteinv(n,N)
    J(N+1)=0;
    for k=N:-1:n+1
        J(k)=(1/exp(1)+J(k+1))/k
    end
    Jnp1 = J(n+1)
endfunction
```



- Résultat du calcul ($N = 500$)

n	I_n
0	0.6321206
1	0.2642411
2	0.1606028
3	0.1139289
4	0.0878363
5	0.0713022
6	0.0599336
7	0.0516560
8	0.0453682
9	0.0404341
10	0.0364613
⋮	⋮
15	0.0244243
20	0.0183505
30	0.0122495
40	0.0091914
⋮	⋮

Effets des erreurs d'arrondi

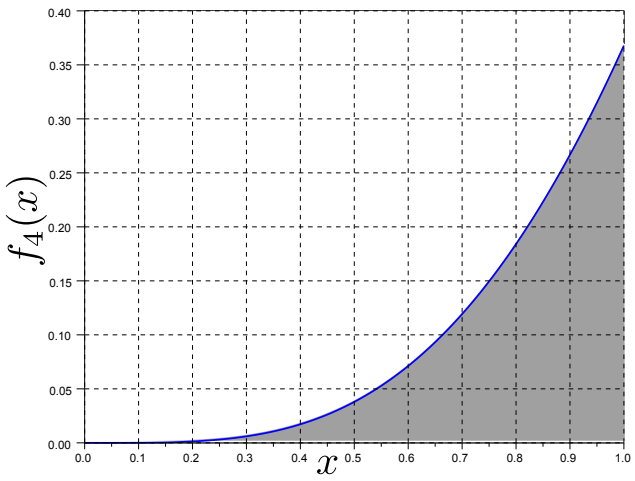
- Calcul d'une suite

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Troisième méthode

- Calcul par intégration numérique :

pour n $= 4$



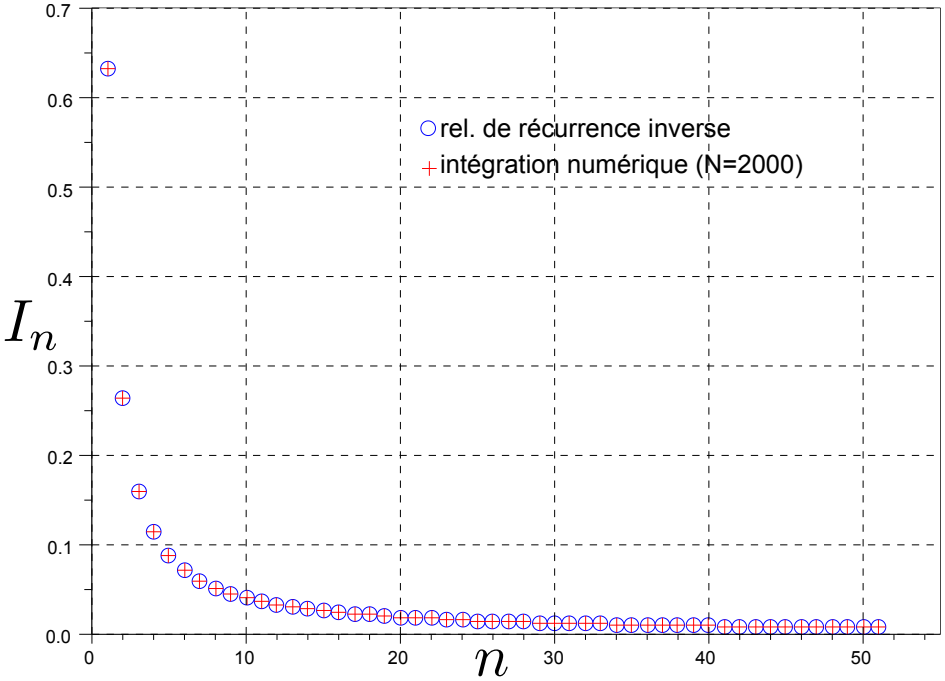
- Méthode de calcul : formule composite du trapèze (Chap. 4)
  On décompose $[0, 1]$ en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $h = \frac{1}{N}$ et on approche $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_n(x_i) + f_n(x_{i+1}))$ (formule des trapèzes)

$$\int_0^1 f_n(x)dx \simeq h \times \frac{f_n(0)}{2} + h \times \sum_{i=1}^{N-1} f_n(x_i) + h \times \frac{f_n(1)}{2}$$

Effets des erreurs d'arrondi

- Programme Scilab :

```
function [T]=trapeze(f,n,N)
    h=1/N;
    T = (f(n,0)+f(n,1))/2
    for k=1:N-1
        T= T + f(n,k*h)
    end
    T = T*h
endfunction
```



- Résultat du calcul

n	I_n (N=2000)	I_n (N=20)
0	0.6321206	0.6322522
1	0.2642411	0.2640328
2	0.1606028	0.1606794
3	0.1139290	0.1140823
4	0.0878363	0.0880663
5	0.0713022	0.0716087
6	0.0599337	0.0603167
7	0.0516560	0.0521155
8	0.0453682	0.0459040
9	0.0404341	0.0410462
10	0.0364614	0.0371496
⋮	⋮	⋮
15	0.0244244	0.0254904
20	0.0183506	0.0197885
30	0.0122497	0.0144049
40	0.0091917	0.0120179
⋮	⋮	⋮

Discrétisation d'un problème continu

- Discrétisation

  permet de passer d'un problème mathématique continu défini par une équation différentielle sur une région de l'espace à un problème mathématique discret défini par un système d'équations avec un nombre fini d'inconnues.

  - Exemple : la solution d'une équation différentielle est une fonction que l'on peut approcher par sa valeur en un nombre fini de points
  - opération incontournable pour obtenir une approximation de la solution de certains problèmes

  $\Rightarrow$ maîtrise de l'erreur de discrétisation : estimation de l'erreur commise par rapport à la solution exacte (pas toujours connue)

Exemple : la dérivation numérique

- Dérivée première

Définition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Approximation :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ pour } h \text{ petit}$$

- Formule de Taylor (rappel).

Soit un réel x. Si f est $n+1$ fois dérivable sur I (intervalle ouvert contenant x), alors pour tout $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(\alpha \in]0, 1[)$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(\alpha \in]0, 1[)$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

2. $f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ $(\beta \in]0, 1[)$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation

1. $f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(\alpha \in]0, 1[)$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

2. $f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ $(\beta \in]0, 1[)$

   erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

3. $f'(x) + \frac{h^2}{3} f'''(x + \gamma h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ $(\gamma \in]-1, 1[)$

   erreur commise en h^2 ($h := h/10$, erreur := erreur/100)

Dérivation numérique : dérivée première

- Approximation
  1. $f'(x) + \frac{h}{2} f''(x + \alpha h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(\alpha \in]0, 1[)$

     erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

  2. $f'(x) - \frac{h}{2} f''(x - \beta h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ $(\beta \in]0, 1[)$

     erreur commise en h ($h := h/10$, erreur := erreur/10)

  3. $f'(x) + \frac{h^2}{3} f'''(x + \gamma h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ $(\gamma \in]-1, 1[)$

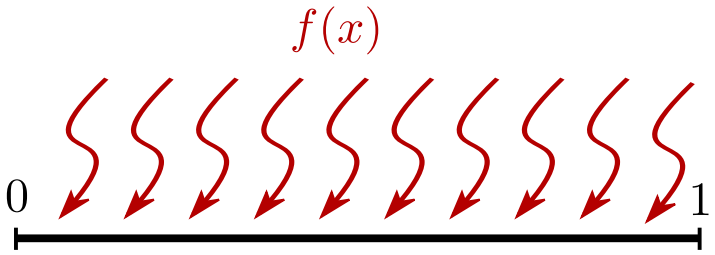
     erreur commise en h^2 ($h := h/10$, erreur := erreur/100)
- Ordre de convergence
  - Approximations 1 et 2 : convergence d'ordre 1 ou linéaire (l'erreur tend vers 0 comme h)
  - Approximation 3 : convergence d'ordre 2 ou quadratique (l'erreur tend vers 0 comme h^2)

Dérivation numérique : application

- Dérivée seconde : approximation

$$f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x+\gamma h) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}, \ \gamma \in]-1, 1[$$

- Application : équation de la chaleur (stationnaire en dim. 1)



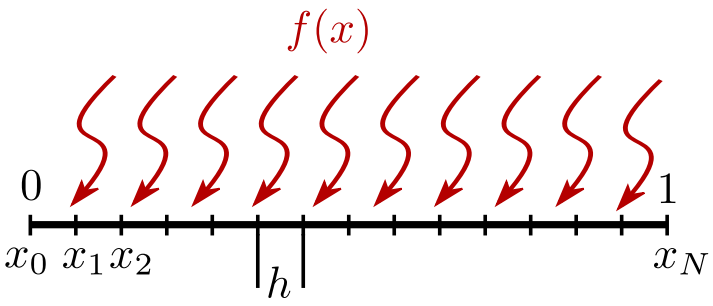
$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), x \in]0, 1[\\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Dérivation numérique : application

- Dérivée seconde : approximation

$$f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x+\gamma h) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}, \ \gamma \in]-1,1[$$

- Application : équation de la chaleur (stationnaire en dim. 1)



Discrétisation :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_k) = f(x_k), k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ u(x_0) = 0, \\ u(x_N) = 0. \end{cases}$$

Dérivation numérique : application

- Approximation :
  - $\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_k) \simeq \dfrac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2}$
  - v_k approximation de $u(x_k)$

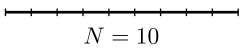
$$\begin{cases} -\dfrac{v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1}}{h^2} = f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ v_0 = 0, \\ v_N = 0. \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

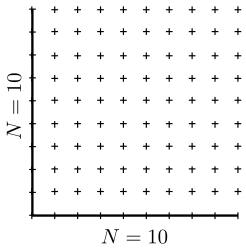
$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

- Solution approchée obtenue par la résolution d'un système linéaire

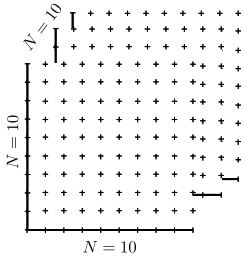
- Intérêt du recours au calcul numérique :



1D : 10 inconnues, système à résoudre : 10×10



2D : 100 inconnues, système à résoudre : 100×100



3D : 1000 inconnues, système à résoudre :
1000×1000 inabordable pour l'humain mais moins de quelques secondes pour un ordinateur

L'analyse numérique permet d'aborder des problèmes inabordables sans les capacités de calcul des ordinateurs ...

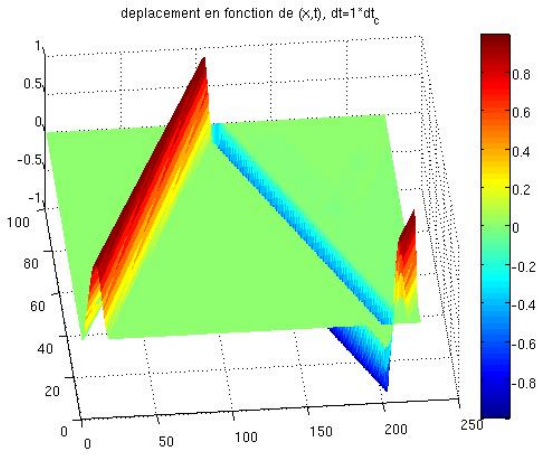
mais ...

l'analyse critique des résultats reste le travail de l'ingénieur !

Encore un exemple ...

- Propagation d'onde dans une barre
- équation continue :

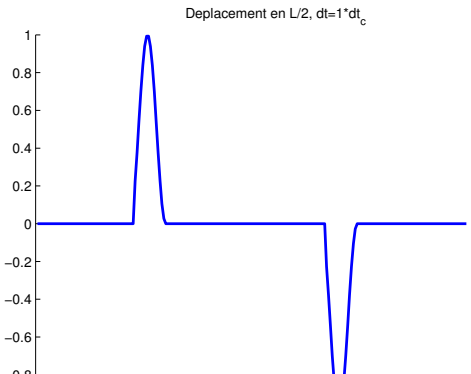
$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall[x,t] \in]0,\ell[\times]0,T$$
$$u(t,x=0) = \sin^2(\frac{\pi t}{\tau}) \qquad \forall t \in [0,T]$$
$$u(t,x=\ell) = 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$
$$u(0,x) = 0 \qquad \forall x \in [0,\ell]$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \qquad \forall x \in [0,\ell]$$



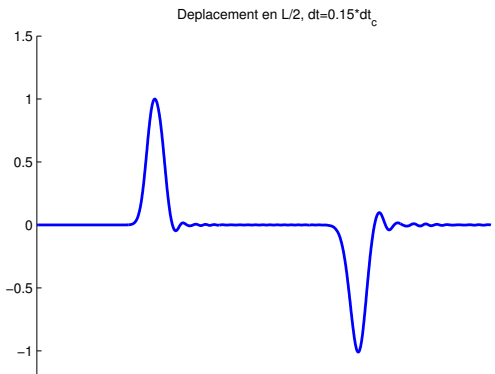
- discrétisation en temps et en espace

Déplacement en $x = \ell/2$:

$t = t_c$



$t = 0,15 \times t_c$



$t = 1,001 \times t_c$